Universidade do Minho

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO E PSICOLOGIA

A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NO "ÁBACO DOS INTEIROS": UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

Márcia Paula Fraga Coelho

Dissertação submetida à Universidade do Minho
como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Educação
na Área de Especialização em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática

Professora Orientadora: Conceição Almeida

Braga, 2005

É autorizada a reprodução integral desta tese, apenas para efeitos de investigação, mediante declaração escrita do interessado, que a tal se compromete.

A autora.

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo apoio e estímulo que sempre me dedicaram, sendo que a minha mãe foi minha colega no primeiro ano deste mestrado, e o meu pai participou, ainda, na revisão do trabalho escrito.

À professora Conceição Almeida, por ter aceite ser minha orientadora, pela disponibilidade e acompanhamento.

À colega Alexandra Martinho e à sua turma de 7.º A, pelo empenho e participação nesta experiência.

Aos meus irmãos Nuno e Pedro, pela atenção e colaboração que me prestaram ao longo do trabalho.

Ao Rui, pelo companheirismo, pela sua colaboração nos pormenores informáticos e fotográficos, e pelo seu espírito infinitamente compreensivo...

A todos os meus amigos, em particular, à Mizé, ao Mário e à Rita, pela força que me transmitiram e pela tolerância de várias ausências ao longo dos últimos tempos.

Ao Tiago, por ter acreditado que eu era capaz e por me ter transmitido tanta força no início deste trabalho.

Finalmente, um agradecimento especial ao *Prof. Doutor Agostinho da Silva*, que criou um fundo no Montepio Geral, instituindo o Prémio D. Dinis, no âmbito do Ministério da Educação, com a finalidade de apoiar jovens que frequentem mestrados em ciências de Educação, Filosofia e Agronomia. A atribuição deste prémio, relativo a 2002, numa fase embrionária deste trabalho, foi um incentivo fundamental ao seu desenvolvimento. Por isso, este agradecimento final a um eterno credor da ciência e da cultura.

RESUMO

Este trabalho foi motivado pela insatisfação sentida, por professores e alunos, em torno da explicação abstracta da *Regra dos Sinais* para a Multiplicação, principalmente, do caso "menos vezes menos dá mais". Normalmente, este assunto é abordado, nos manuais e pelos próprios professores, de uma forma abstracta e que não permite ao aluno estender aos números negativos o sentido operatório concreto que atribui à multiplicação.

Assim, este trabalho consistiu na apresentação de uma Proposta de ensino, para o 7.º ano, da Multiplicação de números inteiros relativos, usando materiais manipuláveis – o "Ábaco dos Inteiros" - , com o objectivo de saber se a mesma seria facilitadora do ensino e aprendizagem desta matéria. Neste sentido, propusemo-nos responder à seguinte questão de investigação:

"Será efectiva uma abordagem de ensino, para a Multiplicação de números inteiros relativos, no 7.º ano, usando o "Ábaco dos Inteiros"?"

Na fundamentação teórica, abordámos, por ordem crescente de especificidade, os temas que se relacionavam com a questão de investigação, ou seja: - o Ensino e Aprendizagem da Matemática; - Números e Operações; - Multiplicação de números negativos.

Tendo em conta a natureza dos objectivos do presente estudo, optámos por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, realizando um estudo de caso – o referido método de ensino.

Nesta experiência, participaram uma professora (que lecciona há 16 anos), e a sua turma de 7.º ano (do ano lectivo 2003/04). A recolha de informação foi feita através de duas entrevistas realizadas à professora antes e após a experiência; através da observação das duas aulas em que decorreram as actividades; e ainda através das respostas escritas dos alunos a uma questão que lhes foi colocada no final da experiência.

Para a concretização das actividades planeadas tivemos que mandar construir vários exemplares do material – "Ábaco dos Inteiros" – uma vez que este não existe no mercado.

A dinâmica de aula conseguida durante a implementação da experiência ultrapassou as melhores expectativas: o nível de envolvimento foi total. Consequentemente, a professora revelou-se bastante motivada e satisfeita com os resultados imediatamente positivos desta abordagem. Inicialmente, a professora tinha revelado o receio de que a experiência fosse demorar mais tempo do que o habitual, dado utilizar materiais manipuláveis, mas esse receio desfez-se com a constatação do oposto: a professora surpreendeu-se com a rapidez com que os alunos operaram no "Ábaco dos Inteiros".

A professora concluiu que as vantagens principais desta abordagem foram as seguintes: 1) uma surpreendente dinâmica de aula, revelada nos níveis de motivação, participação e envolvimento dos alunos; 2) a rapidez com que "passou a mensagem"; 3) melhorias na Avaliação dos alunos; 4) compreensão intuitiva da Regra dos Sinais, nos vários casos da multiplicação, ao permitir que os alunos vissem e manipulassem o "Ábaco dos Inteiros" nas várias situações. Além disso, a professora revelou-nos o seu desejo de "ver" este material disponível nas escolas, pois gostaria de poder voltar a repetir a experiência, nas próximas turmas de 7.º ano.

Concluimos, por isso, que esta abordagem da multiplicação de números inteiros relativos é efectiva tanto ao nível da aprendizagem como do ensino.

Abstract

This work was motivated by the insatisfaction felt both by teachers and students regarding the abstract explanation of the Signs' Rule for the multiplication, mainly, the case of «a negative times a negative equals a positive». Usually, this issue is approached in manuals and by the teachers in an abstract way that disables students to extend to the negative numbers the same concrete operation sense attributed the multiplication.

So, this work consisted in the presentation of a Teaching Proposal, for the 7th grade, of the multiplication of integers, using manipulative material - "Integer Abacus"- with the purpose of finding out if this would facilitate the teaching and learning process on this subject. Therefore, we proposed to answer the following question:
«Will the use of the "Integer Abacus" in the 7th grade be an effective learning procedure for the multiplication of integer numbers?»

In the theoric fundamentation we dealt, by order of increscent particularity, the themes related with the investigation question, that is: The Maths' teaching and Learning Process, Numbers and Operations, Multiplication of negative numbers.
Regarding the nature of the objectives of this study, we chose a qualitative investigation methodology, based on a case study – the learning procedure..

In his experiment took part a teacher (teaching for 16 years) and her 7th grade class (school year 2003/4).The selection of information was done through two interviews previously directed to the teacher before and after the experiment, through the observation of two of the classes where the activities took part and also through the written answers of the students regarding the question asked at the end of the experiment.

For the implementation of the planned activities we had to order the construction of several exemplars of this material - "Integer Abacus" - due to the lack of its existence in the market.

The classes' dynamic achieved during the implementation of the experiment exceeded the best expectations: the level of involvement was total. Therefore, the teacher showed highly motivated and satisfied with the immediate positive results of this teaching procedure. Initially, the teacher was afraid that the experiment would take more than the usual time, due to the use of manipulative materials, but this fear fell away with the observation of the opposite effect: the teacher was surprised with the quickness with which the students operated the "Integer Abacus".

The teacher reached the conclusion that the main advantages of using this approach were: 1) a surprising class dynamic revealed through the levels of motivation, participation and involvement of the students; 2) the quickness in passing the message through; 3) improval in the students' evaluation; 4) intuitive understanding of the Signs' Rule in the various cases of multiplication that allowed students to see and operate the abacus in the various situations.

Besides all this, the teacher revealed us her wish to «see» this material available in schools, because she would like to repeat the experience in future 7th grade classes.

Therefore, we conclude that this approach of the multiplication of integers is effective both to the teaching and to the learning process.

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. II.1 – 6 membros numa classe cuja valoração é – 21 pág. 53

Fig. II.2 – Classe com a valoração –6, ou seja, subiu 15 valores pág. 53

Fig. III.1 – “Ábaco dos Inteiros” pág. 58

Fig. III.2 – “Ábaco dos Inteiros” pág. 58

Fig. III.3 – Representação do zero pág. 73

Fig. III.4 – Representação do zero pág. 73

Fig. III.5 – Representação do zero pág. 73

Fig. III.6 – Representação do (+3) pág. 74

Fig. III.7 – Representação do (+3) pág. 74

Fig. III.8 – Representação do (-4) pág. 74

Fig. III.9 – Representação do (-4) pág. 74

Fig. III.10 – Possível esquema da operação (+2) + (-5) = -3 pág. 74

Fig. III.11 – Possível esquema da operação (+2) - (-5) = +7 pág. 75

Fig. III.12 – Possível esquema da operação (+2) x (+3) = +6 pág. 75

Fig. III.13 – Possível esquema da operação (+2) x (-3) = -6 pág. 75

Fig. III.14 – Possível esquema da operação (-2) x (+3) = -6 pág. 76

Fig. III.15 – Possível esquema da operação (-2) x (-3) = +6 pág. 76

Fig. III.16 – “Ábaco dos Inteiros” pág. 80

Fig. IV.1 – Foto dos alunos com os “Ábaco dos Inteiros” nas suas mesas de trabalho pág. 86

Fig. IV.2 - Ábaco dos inteiros, com uma possível representação do número “zero” pág. 86

Fig. IV.3 – Alexandra Martinho e os seus alunos de 7.º ano, trabalhando com o “Ábaco dos Inteiros” pág. 93

Fig. IV.4 – Aluna trabalhando no Ábaco dos Inteiros pág. 95

Fig. IV.5 – Aluna manipulando o “Ábaco dos Inteiros” enquanto registava o resultado das operações. pág. 96

ÍNDICE DE CONTEÚDOS

AGRADECIMENTOS pág. iv

RESUMO pág. V

ABSTRACT pág. Vi

ÍNDICE DE FIGURAS pág. Vii

ÍNDICE DE CONTEÚDOS pág. Viii

CAPÍTULO I
Introdução pág. 1

CAPÍTULO II
Revisão de Literatura pág. 3
1- Ensino e aprendizagem da Matemática pág. 3
2- Números e operações pág. 29
3- A multiplicação de números negativos pág. 48

CAPÍTULO III
Metodologia pág. 58
1- Opções metodológicas da investigação pág. 58
2- As opções de trabalho pág. 66
3- A experiência / trabalho realizado pág. 78

CAPÍTULO IV
Resultados da implementação da abordagem pág. 85
1- O trabalho dos alunos e seus resultados pág. 85
2- A professora e suas perspectivas pág. 101

CAPÍTULO V
Conclusões pág. 114
1- Síntese do estudo pág. 114
2- Síntese dos Resultados pág. 116
3- Recomendações / Limitações pág. 122

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS pág. 124

ANEXOS pág. 128

I – INTRODUÇÃO

A multiplicação de números negativos sempre intrigou professores e alunos avessos a pseudo-explicações do tipo “a multiplicação de números com sinais diferentes dá menos” ou a “multiplicação de números com sinais iguais dá mais”. De facto, apesar da Regra dos Sinais para a Multiplicação já ter sido demonstrada por vários matemáticos famosos, entre eles, Euler, há ainda quem se sinta insatisfeito com o facto de a mesma não ser facilmente deduzida de forma intuitiva, principalmente, no caso (-) x (-) = (+).

Foi esta insatisfação que motivou o nosso trabalho, agravada pelo facto desta matéria se abordar no 7.º ano de escolaridade, portanto, numa altura em que os alunos pensam e formam os seus conceitos matemáticos baseados, em primeira instância, em situações concretas e reais. Por isso, esta investigação começou por desenhar uma Proposta de Ensino da Multiplicação de números inteiros relativos, para o 7.º ano, utilizando materiais manipuláveis – “Ábaco dos Inteiros”. O objectivo era implementar a mesma para sermos capazes de responder à seguinte questão:

“Será efectiva uma abordagem de ensino, para a Multiplicação de números inteiros relativos, no 7.º ano, usando o “Ábaco dos Inteiros”?”

Perante esta questão abrangente, propusemo-nos esclarecer, fundamentalmente, se esta abordagem mais intuitiva, porque baseada em materiais manipuláveis, seria efectiva ao nível da facilitação da aprendizagem e também do ensino, ou seja, na perspectiva quer dos alunos quer do professor.

Pelo que apurámos não é difícil concluir a pertinência deste tema e a necessidade de investigarmos novas abordagens para o ensino do mesmo. Esperamos, assim, contribuir para abrir perspectivas neste sentido e colmatar algumas lacunas da investigação educacional nesta matéria.

Terminando gostaríamos de chamar a atenção para a responsabilidade e abertura dos professores, na implementação de novas abordagens, que se revelem positivas na aprendizagem da Matemática, subscrevendo o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991):

> "Quase todas as crianças podem ter sucesso, desde que lhes seja facultado o ensino adequado. Os professores têm que estar atentos (...) e devem estar preparados para usar diferentes métodos de ensino e de avaliação do conhecimento, neste domínio." (p.59)

II – REVISÃO DE LITERATURA

Para a revisão da literatura, foi efectuada pesquisa, tendo como referência o problema da investigação que se debruça sobre a multiplicação de números negativos. Além deste tema específico, também pesquisámos outros temas mais alargados que, a nosso ver, estão directamente relacionados com a multiplicação de números negativos, como sejam: os problemas gerais do ensino da Matemática; o problema dos métodos de ensino; as perspectivas psicológicas sobre a aprendizagem; o problema dos números e operações e as dificuldades na multiplicação e divisão.

Durante a pesquisa, consultámos bases de dados, nomeadamente, no "Educational Resources Information Center" (ERIC), algumas revistas no domínio da investigação em educação (exs: "Journal of Educational Research", "Educational studies of Mathematics", "Arithmetic Teacher") e a base de dados dos Serviços de Documentação da Universidade do Minho, a partir do que efectuámos uma análise dos trabalhos realizados, a par de uma descrição do estado actual do conhecimento.

II.1- Ensino e aprendizagem da Matemática

Problemas gerais

Para entendermos o quão importante é discutirmos questões como a do melhor método para explicar o "porquê" de "menos vezes menos dar mais" é imprescindível, antes de mais, reflectirmos sobre problemas mais gerais como o do ensino da Matemática. Serão sempre diversas e, muitas vezes, dispersas as considerações que podemos fazer sobre como se põe, actualmente, o problema do ensino da Matemática, mas não nos devemos coibir , nem como investigadores educacionais, nem como professores de Matemática, nem como cidadãos, de dar o nosso contributo para esta reflexão.

Tentemos a organização possível deste raciocínio começando pelos objectivos do ensino da Matemática, pois só depois de os termos definido poderemos, tendo em conta a matéria propriamente dita, examinar os problemas de prática pedagógica e os problemas psicológicos a eles ligados.

Já em 1975 Mialaret (1975) defendia que o ensino da Matemática Elementar deveria visar três objectivos:

"fornecer ao aluno um instrumento de trabalho, desenvolver a sua formação intelectual e adaptá-lo à vida." (p. 18)

Mais recentemente, o *National Council of Teachers of Mathematics*(1991), nas Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar define, neste âmbito, cinco objectivos articulados entre si para todos os alunos (do 1.º ao 12.º ano): "(1)que aprendam a dar valor à matemática, (2) que adquiram confiança na sua capacidade de fazer matemática, (3) que se tornem aptos a resolver problemas matemáticos, (4) que aprendam a comunicar matematicamente, e (5) que aprendam a raciocinar matematicamente." (p.5,6)

Os objectivos definidos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* também têm subjacentes os objectivos mais gerais lançados por Mialaret, embora revelem outro grau de especificação quando chamam a atenção para os problemas actuais da valorização social da Matemática e da comunicação matemática. De facto, e apesar de, actualmente, serem introduzidas algumas especificações e orientações aos objectivos lançados por Mialaret, estes são, de uma forma geral, mencionados amplamente, ditos por estas ou outras palavras.

Assim, começaríamos pela "aquisição de um instrumento de trabalho", que a maioria entenderá pelo ensino da Aritmética e, mais tarde, pela iniciação a uma Matemática de domínios mais alargados.

Ora, é incontestável a importância da Aritmética e do Cálculo como instrumento de trabalho, mas é, hoje, também incontestável a importância urgente de melhorar pedagogicamente o ensino desta área para ir de encontro, de uma forma mais rápida e eficaz, aos objectivos que, a partir daqui, se alargam. Atente-se no seguinte:

- a propósito do conceito de número:

> "O envolvimento activo nas manipulações físicas e a expressão das mesmas encorajam as crianças a reflectir sobre as suas acções e a

> construir os seus próprios significados a respeito do número" (National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p.48);

- a propósito da compreensão das operações:

> "A compreensão das operações fundamentais – adição, subtracção, multiplicação e divisão – é central para o conhecimento da matemática. (...) O ensino do significado das operações incide mais nos conceitos e relações do que no cálculo(...)." (National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p.52)

- a propósito do cálculo com números inteiros:

> " É dando ênfase aos conceitos subjacentes, usando materiais físicos para modelar procedimentos e desenvolvendo padrões de pensamento, que os professores podem ajudar as crianças a aproximarem-se da tabuada e dos algoritmos e a compreenderem a sua utilidade e a sua relevância nas situações do dia-a-dia. Este tipo de abordagem promove também, uma aprendizagem eficiente das técnicas de cálculo e favorece o desenvolvimento do raciocínio, o discernimento matemático e a confiança da criança na sua capacidade de fazer matemática." (National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p. 55).

Mialaret (1975) também já focava algumas destas ideias na seguinte opinião:

> "É certo que o hábito a dar aos alunos na manipulação de ábacos, de tabuadas, de máquinas de calcular deve ser desenvolvido mesmo que, na aparência, nunca mais tenham de calcular pelo simples facto de já serem conhecidos os resultados! Note-se, porém, que se a utilização de tais instrumentos aumenta a rapidez de cálculo e permite efectuar cálculos mais complicados pressupõe, no entanto, uma familiaridade ainda maior com os sistemas de numeração do que aquela que é necessária para as operações clássicas".(p.20)

É de salientar, por tudo isto, a importância na aposta de um outro objectivo, que é o de "desenvolver a formação intelectual do indivíduo", a par do primeiro, o da "aquisição de um instrumento de trabalho". Para esta aposta, será necessária especial atenção aos métodos de ensino, especialmente enquanto a criança é pouco autónoma relativamente às suas aprendizagens e enquanto essas aprendizagens estiverem muito dependentes de um significado prático.

Todos sabemos que um determinado método de ensino pode ser mais favorável do que outro para determinadas aprendizagens, matemáticas ou de outra natureza, que se pretendam promover no aluno, por isso, as opções metodológicas irão influenciar fortemente as aquisições dos conceitos matemáticos e a compreensão das relações matemáticas, fundamentais para o desenvolvimento da formação intelectual do indivíduo. Mais adiante, abordaremos novamente esta questão e o papel que os métodos de ensino têm desempenhado nos bastidores das reformas da educação matemática, em Portugal.

É, portanto, absolutamente necessário insistir no "bom" ensino da Matemática, pois uma boa formação matemática proporcionará, sem dúvida, um enriquecimento conceptual que influenciará positivamente o indivíduo também para a vida prática e profissional, que é o objectivo geral último do ensino da matemática – "adaptar o indivíduo para a vida".

João Pedro da Ponte (2003), numa conferência integrada num seminário organizado pelo Conselho Nacional de Educação refere também a grande importância deste papel social da Matemática:

> "(...) a Matemática serve para promover o desenvolvimento das crianças e dos jovens, estimulando uma maneira de pensar importante para a vida social e para o exercício da cidadania. Este é o plano em que a Matemática serve as necessidades dos indivíduos. Incluem-se aqui os aspectos mais utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala de aula), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isso sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de natureza pessoal, recreativa, cultural, cívica e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância." (p.38)

Concluindo, o objectivo da formação intelectual não só é importante por si só, como também porque a consecução deste objectivo influenciará directamente outro de suma importância, o de "adaptar o indivíduo para a vida". E, neste caminho, é extremamente importante o cuidado com os métodos de ensino, pois são estes que podem desvirtuar esse mesmo caminho, senão vejamos:

> "Os objectivos do ensino da Aritmética e da Matemática Elementar são, pois, numerosos e complexos; esquecer alguns deles é mutilar a formação que deve ser equilibrada. Reduzir o ensino da Matemática unicamente a uma técnica e conduzi-lo independentemente de todas as formas e modalidades de educação é não garantir todas as suas potencialidades e toda a sua eficácia. Não é, pois, suficiente ser um bom matemático para ser automaticamente bom professor de matemática." (Mialaret, 1975, p.24)

Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991) lança o mesmo alerta:

> "Quase todas as crianças podem ter sucesso, desde que lhes seja facultado o ensino adequado. Os professores têm de estar atentos aos problemas individuais e devem estar preparados para usar diferentes métodos de ensino e de avaliação do conhecimento, neste domínio." (p. 59)

O problema dos métodos de ensino

Se efectuarmos um levantamento de opiniões quer de individualidades quer de instituições preocupadas com os problemas do ensino da Matemática, verificamos que há um ponto unificador de todas elas : - a preocupação com os métodos de ensino.

Já J. Sebastião e Silva (1964), principal protagonista português do movimento internacional da "Matemática moderna" (dos anos 60), para além do contributo que deu para uma renovação nos currículos, através dos manuais que redigiu, contemplando novas matérias que se pretendiam introduzir (Lógica, Probabilidades e Estatística,...) e articulando-as com as matérias tradicionais (Cálculo, Análise, Geometria Analítica, Trigonometria), revelava também uma significativa preocupação com a renovação dos métodos de ensino. Nas Normas Gerais para o ensino da Matemática, que apresenta num dos seus livros, afirma o seguinte: "1- A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino." (Silva, J.S., 1964, citado em Ponte, 2003, p. 29)

Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (1994) aponta a mesma preocupação, sugerindo que qualquer alteração ao nível dos currículos e programas deverá ser acompanhada por uma alteração dos métodos de ensino.

Assim sendo, o professor assume um papel central nesta dinamização e adequação dos métodos de ensino, pois é ele que tem a responsabilidade de adoptar este ou aquele método de ensino e não se esgotar a si mesmo e à disciplina que lecciona no tradicional método expositivo que tantas críticas levanta desde o movimento da matemática moderna, dos anos 60.

A propósito, João Pedro da Ponte (2003) também nos chama a atenção para o mesmo, numa conferência recente sobre as Prioridades do Ensino da Matemática em Portugal, integrada num seminário organizado pelo Concelho Nacional de Educação (CNE): "A chave para a melhoria do ensino está nos professores. O ensino da Matemática não melhorará sem o empenho criativo e responsável em projectos e iniciativas (...)" (p. 53).

Porém, João Pedro da Ponte chama ainda a atenção para outros actores educativos, como aqueles que produzem materiais educativos (manuais e livros de exercícios, software educativo e conteúdos multimédia online); os que fazem formação dos professores, tanto no campo da Matemática como da sua didáctica; todos os que podem contribuir para uma nova imagem social da matemática; e os que podem intervir para uma efectiva melhoria das condições nas escolas. (2003, p.53,54).

Importa apenas acrescentar, em relação aos métodos de ensino, que é necessário que todos os actores educativos e, principalmente, os professores, se inteirem das directrizes psicológicas que os podem suportar, para que estes sejam pensados da forma mais adequada ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Só assim se apresentarão com o potencial pretendido.

Perspectivas psicológicas e recomendações pedagógicas

1) Perspectiva Construtivista

1.1) Piaget

De acordo com Sprinthall e Sprinthall (1993), após examinar os padrões de pensamento que as crianças usam desde o nascimento até ao final da adolescência, Piaget propôs que o desenvolvimento cognitivo se processa em estádios de desenvolvimento, segundo uma sequência invariável e dependente da qualidade das experiências interactivas que ocorrem entre criança e o meio.

Segundo os mesmos autores, Piaget encontrou sistemas consistentes dentro de certas faixas etárias amplas, definindo, assim, quatro estádios principais de desenvolvimento cognitivo:

- Estádio <u>Sensório – motor</u> (até aos 2 anos): marcado pela experiência imediata, através dos sentidos. Aqui, a criança ainda não tem acesso à linguagem, por isso, apenas vê e sente o que está a acontecer, mas não tem forma de representar a realidade ou de categorizar a sua experiência.

- Estádio <u>Intuitivo</u> ou <u>Pré-Operatório</u> (2 – 7 anos): durante este estádio, o pensamento sofre uma grande transformação qualitativa, pois as crianças já não estão limitadas ao seu meio sensorial imediato. As crianças desenvolvem o seu vocabulário e a sua capacidade de armazenar palavras, estruturas gramaticais e imagens aumenta tremendamente.

O método de aprendizagem predominante neste estádio é intuitivo: as crianças não se preocupam com a precisão, deliciam-se, antes, com livres associações, imitações, fantasias e significados ilógicos.

Piaget (1979) demonstrou, porém, que as crianças nesta idade têm dificuldade em aperceber-se da natureza reversível das relações. Por exemplo, entre dois copos de água (um alto e fino, um baixo e largo), com a mesma quantidade, a criança, sem disso ser informada, opta pelo copo mais alto porque, intuitivamente, parece-lhe ter maior capacidade.

Concluindo, neste período, as estruturas mentais são amplamente intuitivas, livres, criativas e imaginativas e com uma expressão comunicativa abundante decorrente dos avanços da linguagem.

- Estádio das <u>Operações Concretas</u> (7 – 11 anos): este estádio representa outra reorganização fundamental da estrutura cognitiva. As crianças passam dos pensamentos mágicos e intuitivos para pensamentos lógicos e concretos, compreendendo as relações funcionais porque são específicas e porque podem ser testadas. Nesta fase, as crianças já podem medir, pesar, calcular quantidades, de tal forma que diferenças aparentes, como as do copo de água de há pouco, não as “enganam”. A sua capacidade de compreender o mundo é agora tão lógica quanto, anteriormente, era ilógica. Neste período das operações concretas, os objectos ainda constituem o conteúdo, mas a coordenação das acções interiorizou-se pela representação e a forma é agora dada pelas operações de reversibilidade e reciprocidade.

Durante a escolaridade, isto implica que sempre que se der ênfase a actividades como contar, classificar, construir e manipular, o desenvolvimento cognitivo será estimulado.

7º ano (média: 12 anos)

- Estádio das <u>Operações Formais</u> (11 – 16 anos): este estádio também contém notáveis diferenças que se tornam bem evidentes no pensamento das crianças / adolescentes. Piaget sublinhou quatro diferenças fundamentais:

1 e 2) Os possíveis e a Testagem de Hipóteses – a criança além de pensar no que determinada experiência é, também pensa no que poderá ser; além disso, nesta fase, a criança consegue testar várias hipóteses, demonstrando uma maior capacidade de examinar os dados antes de chegar a uma conclusão;

3) Pensamento alargado (Metacognição) – capacidade do adolescente pensar sobre o seu próprio pensamento e o dos outros. Esta nova capacidade, designada por metacognição, permite ao adolescente uma auto-reflexão, que, por sua vez, lhe permite um amplo alargamento da imaginação, bem como oportunidades de autocorrecção a nível da resolução de problemas muito

maiores e ainda novas formas de compreensão, sem necessitar de testar de facto cada solução na realidade concreta;

4) Pensamento perspectivista – está directamente ligado à metacognição, permite que o adolescente tenha uma maior consciência sobre o facto de pessoas diferentes terem pensamentos diferentes sobre a mesma ideia ou situação. Desenvolveu-se uma certa forma de relativismo, onde deixa de existir um pensamento único e correcto, é como se compreendessem que as outras pessoas têm interesses, conhecimentos e formas de pensar diferentes das suas.

A teoria de Piaget (1983) veio revolucionar a compreensão do desenvolvimento intelectual e confrontar a escolas e os professores com o desafio de construírem novas abordagens para o desenvolvimento curricular.

Implicações pedagógicas da perspectiva piagetiana

A implicação pedagógica que mais se destaca da teoria piagetiana é a de que o desenvolvimento cognitivo depende da acção, em qualquer dos estádios. Para aprender, as crianças precisam de ocupar-se com actividades apropriadas. Note-se bem a expressão “actividades apropriadas”, devendo entender-se a mesma no contexto estrutural de cada estádio de desenvolvimento cognitivo.

Assim sendo, para que o professor possa desempenhar convenientemente as suas tarefas, é necessário que este possua conhecimento sobre a ordenação sequencial do desenvolvimento psicogenético e que o tenha em conta, não só no processo de ensino/aprendizagem, mas, igualmente, na elaboração dos programas e na sua organização das matérias.

Tentamos, neste trabalho e na proposta que desenvolvemos, ter em conta esta perspectiva do processo de ensino/aprendizagem, quer na preocupação que tivemos em informarmo-nos do estádio de desenvolvimento em que estariam a maioria das crianças de 7º ano, para quem se destina esta proposta de ensino, quer na escolha da própria proposta, que tentou ter em conta esta implicação pedagógica fundamental – a acção do sujeito na construção do seu próprio conhecimento. Assim sendo, e tendo em conta que a faixa etária dos alunos de 7º ano ronda os 12 anos, ou seja, alunos que estarão numa fase de transição do período das operações concretas para o período das operações formais, a nossa proposta de ensino para a multiplicação de números inteiros relativos teve como base a opção por um modelo concreto – o ábaco dos inteiros –, que permitisse aos alunos uma abordagem operatória concreta e uma experiência matemática apropriada a esta transição de estádios. Com isto, rejeitamos introduzir a Regra dos Sinais para a Multiplicação antes de uma compreensão concreta e também oral das situações multiplicativas que envolvem os números inteiros.

Luísa Morgado (1993), quando aborda também a perspectiva piagetiana aplicada ao processo de ensino/aprendizagem da Aritmética, sublinha isto mesmo: "Na verdade, é pela acção exercida sobre os objectos que os conceitos matemáticos e, em particular, os aritméticos se constróem. O aluno deve pois, nesta disciplina, ter total liberdade de manipular e estabelecer relações entre aqueles."(p. 27)

A autora acrescenta ainda que "o professor deve igualmente estar consciente que a aprendizagem da simbologia escrita deve ser feita depois de efectuada a compreensão oral dos problemas, tendo-se, para este efeito, utilizado, sempre que necessário, material concreto".(p. 29)

Tudo isto influenciou a escolha da proposta que desenvolvemos com o Ábaco, pois era a que melhor garantia o valor da acção e da manipulação dos objectos a operar na multiplicação, por parte dos alunos de 7º ano.

1.2) Bruner

Além de Piaget, também cognitivistas como Bruner e Ausubel deram os seus contributos para o movimento psico-educativo que está na base do Construtivismo. Mas foram sobretudo Piaget (1983) e Bruner (1971) que deixaram trabalhos que são preciosos contributos para a elaboração de uma teoria de aprendizagem da matemática.

Ambos concordam que a criança necessita de desempenhar um papel activo no seu processo de aprendizagem e que este pode despoletar-se através da oportunidade da criança agir sobre os materiais, actuando sobre eles, manipulando-os. Contudo, segundo Shulman (1971), enquanto Piaget defende que a criança manipula os materiais por forma a adaptá-los ao seu meio por processos de assimilação e acomodação, transformando-os em esquemas de acção, Bruner defende que a criança representará os materiais e objectos matemáticos através da acção sobre eles, organizando-os posteriormente através de imagens para depois os representar mental e simbolicamente.

Para Bruner (1971), a aprendizagem consiste na formação de conceitos que se adquirem através dos três modos de representar o mundo:

- enactivo (o conhecimento surge através da acção)
- icónico (o conhecimento é representado através da linguagem)
- simbólico (o conhecimento é expresso através da linguagem oral, escrita e simbólica)

Bruner defende ainda que estes três modos de representação poderão ser usados simultaneamente ou segundo várias combinações e que estarão presentes toda a vida.

Embora estas três fases do conhecimento apresentem alguma semelhança com os estádios de desenvolvimento cognitivo propostos por Piaget, Bruner desenvolveu a sua perspectiva numa linha não tão ligada ao desenvolvimento cognitivo, mas, antes, associada a preocupações de índole educacional, defendendo uma aprendizagem que não dependerá somente do desenvolvimento cognitivo nem exclusivamente das capacidades da criança, mas também do que possa ser feito para fazerdesabrochar tais capacidades. Daqui decorre que, quanto melhores forem as condições para a criança desenvolver as destrezas necessárias à realização dos três modos de representação referidos, melhor estará garantida a base do seu crescimento intelectual.

Neste sentido, em nosso entender, a proposta de ensino que desenvolvemos com o "Ábaco dos Inteiros" cria as condições que Bruner (1971) reclama para a aprendizagem, por duas razões fundamentais:

1) porque começa com a manipulação de materiais e, de acordo com Shulman (1971),

> "O processo de aprendizagem geral descrito por Bruner ocorre da seguinte maneira: primeiro, a criança encontra regularidades na manipulação dos materiais, às quais corresponde com regularidades intuitivas que já começa a compreender." (p.181)

2) e porque permite ao aluno, em cada situação operatória com os números inteiros relativos, representá-la dos três modos, combináveis ou não.

- Do modo de representação enactivo, através da acção sobre o Ábaco, ao efectuar cada operação, ao manipular;
- do modo de representação icónico, através das imagens que reproduz do material e das situações operatórias, isto é, através da imagem de acções que já realizou, podendo, agora, abdicar da acção pelo acesso à imagem que a representa;
- do modo de representação simbólico, através da expressão oral, durante a comunicação estabelecida com colegas e com o professor, de cada situação que realizou ou poderia realizar; e através da expressão escrita e simbólica, quando regista raciocínios e resultados que obtém, fruto das representações enactiva e icónica das várias situações.

Há ainda outras diferenças nas perspectivas de Bruner e Piaget, como, por exemplo, o facto de Bruner enfatizar o papel da aprendizagem pela descoberta, enquanto Piaget enfatiza, antes, o papel da resolução de problemas como um veículo para a adaptação e, consequentemente, para a aprendizagem. No entanto, quer num quer noutro caso, o importante não é valorizar a transmissão de conhecimentos, mas sim ajudar o indivíduo na construção do próprio conhecimento.

Concluindo, para os construtivistas, a aprendizagem é vista como um processo activo e o conhecimento como uma construção pessoal.

Além disso, outro ponto importante e consensual entre ambos, e que importa referir, é o da influência que o ambiente tem no desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Bruner destaca sobretudo o ambiente físico e social como um todo e o modo como o indivíduo interage com este ambiente e o representa internamente. Piaget, por seu lado, atribui maior importância à interacção social, principalmente à interacção entre as crianças com o mesmo nível de desenvolvimento intelectual, mais até do que à interacção professor-aluno, na qual, segundo ele, o aluno assume, tendencialmente, um papel mais passivo.

Implicações Pedagógicas do Construtivismo

Podemos, então, sintetizar, numa perspectiva construtivista, como devem ser as actividades de ensino propostas ao aluno. Elas devem, sobretudo:

- ser adequadas ao seu estádio de desenvolvimento;
- considerar os seus conhecimentos e experiências prévias;
- apresentar algum grau de desafio para que ele se mantenha activamente envolvido;
- apresentar uma sequência crescente de complexidade;
- permitir-lhe experiências diversificadas, de modo a optimizar as potencialidades da sua aprendizagem;
- apresentar uma estrutura que permita trabalho grupal e individual, oportunidades comunicativas e de participação em discussões alargadas;
- permitir ao aluno a análise, compreensão e relacionamento de pormenores, sem perder a ideia do conjunto ou da tarefa global de aprendizagem;
- fornecer ao aluno informação relevante e suficiente para que este aprenda a estrutura da actividade e da sua própria aprendizagem;
- interrelacionar-se, de modo a permitir ao aluno diversas abordagens do mesmo tema, em diferentes momentos e a diferentes níveis de profundidade.

Foi nosso objectivo atender às implicações pedagógicas do Construtivismo. Por isso, na escolha e desenvolvimento da proposta de ensino da multiplicação de números relativos, com o Ábaco dos Inteiros, tentámos ter em conta os vários aspectos acima focados, ou seja:

- a adequação da proposta ao estádio de desenvolvimento em que a maioria dos alunos de 7º ano se encontra;
- considerar os conhecimentos prévios dos alunos participantes, nomeadamente, no que dizia respeito ao sentido operatório que tinham da multiplicação, às noções de multiplicador e

multiplicando, e também aos conceitos de número inteiro positivo e negativo;

- apresentar uma actividade que desafiasse os alunos, que os motivasse e envolvesse na aprendizagem. Neste aspecto, o facto da proposta se basear num material manipulável é, por si só, altamente motivante e envolvente, o aluno sente um controlo sobre as suas acções e, consequentemente, sobre a sua aprendizagem, o que ajuda a incrementar os seus níveis de confiança e motivação;
- apresentar a proposta estruturada em níveis de complexidade crescente. Primeiro, apresenta-se o material fazendo algumas referências históricas, depois representam-se alguns números inteiros positivos, negativos e o zero, de várias formas. Só depois se começa a operar ao nível da adição, começando-se com duas parcelas e passando-se, de seguida, para a adição sucessiva introduzindo-se, depois, a subtracção e a adição algébrica sucessiva. Só posteriormente se passa à multiplicação, quando os alunos já estão familiarizados com o material e com as situações operatórias que envolvem a adição algébrica, no mesmo. Todavia, também nesta fase, foi nossa preocupação estruturar os vários casos da multiplicação pelo seu grau de complexidade, por isso, abordamo-los pela ordem seguinte: “(+)x(+)”;“(+)x(-)”;“(-)x(+)”; e, finalmente, “(-)x(-)”;
- apresentar uma proposta que permitisse o trabalho grupal (neste caso, foi distribuído um ábaco por cada par de alunos), e que proporcionasse uma discussão alargada à turma em determinados momentos da experiência;
- fornecer ao aluno a informação relevante necessária acerca do material e da proposta, para que este entendesse a estrutura da actividade e da aprendizagem que ia realizar.

Estes aspectos que acabámos de referir foram considerados, quer na planificação, quer na aplicação da proposta de ensino que realizámos. No entanto, no final da concretização da proposta com o Ábaco dos Inteiros, também foram avaliados outros aspectos, como a análise e compreensão que os alunos demonstraram do que praticaram, numa recolha de informação escrita que lhes foi solicitada após as aulas em que decorreu a experiência.

Além disso, quanto ao último aspecto sobre a inter-relação das actividades a propor e sobre as diversas abordagens do mesmo tema que devem ser feitas em vários momentos e a diferentes níveis de profundidade, este é um ponto a ter-se em conta numa perspectiva global do ensino que se pratica e não apenas na aplicação de uma proposta particular, que foi o que realizámos.

2) Perspectiva Vygotskiana

A perspectiva construtivista tradicional ocupou o centro das discussões entre os professores e educadores, nas últimas décadas. No entanto, actualmente, não podemos deixar de integrar ou conciliar esta perspectiva com os contributos que Vigotsky (1979) trouxe à mesma.

De acordo com Bruner (1997), para Vygotsky, as origens da vida consciente e do pensamento abstracto deveriam ser procuradas na interacção do indivíduo com as condições de vida social, cultural e histórica do mesmo, ao longo do seu desenvolvimento. O contexto social ganha, assim, uma maior dimensão, no sentido em que não é apenas um palco onde o indivíduo age movido por forças internas, mas um verdadeiro campo de interacção e de trocas, onde o indivíduo não é somente activo, mas interactivo. O indivíduo recebe, desde logo, uma bagagem cultural e histórica do meio em que está integrado, a qual vai internalizando na forma de conhecimentos, papéis e funções sociais, interagindo neste contexto. Essa interacção realiza-se através das experiências que vive, dos hábitos, atitudes, valores e da própria linguagem de todos aqueles com que interage, seja na família, na escola ou noutros contextos sociais.

Vygotsky (1979) "oferece-nos", assim, um programa alternativo focado: no ambiente sóciocultural em que as crianças crescem; nas ferramentas (quer físicas, quer psicológicas) que medeiam a experiência; e na internalização como processo pelo qual o plano interno da consciência é formado.

Esta perspectiva é relevante, principalmente, porque a escola que temos é uma escola de massas e uma escola integrada, ou seja, temos todos os alunos e todo o tipo de alunos, o que significa que os professores se deparam com diversas realidades individuais e sociais, que, incontornavelmente, vieram trazer à escola novas variáveis a considerar no processo de ensino e aprendizagem. Isto porque, de facto, estes contextos sociais, históricos e culturais, vão influenciando o desenvolvimento mental dos alunos, na medida em que as experiências a que cada indivíduo tem acesso podem promover ou não as sucessivas aprendizagens que contribuem para esse desenvolvimento.

Para melhor entendermos esta relação entre desenvolvimento e aprendizagem, torna-se necessária a compreensão do conceito de zona de desenvolvimento proximal, sugerida por Vygotsky (1979). Segundo este autor, não devemos considerar apenas o nível de desenvolvimento real do indivíduo, ou seja, aquele que pode ser detectado através de testes, escalas de forma imediata. Vygotsky aponta a existência de um outro nível de desenvolvimento – o proximal ou potencial, que deve ser considerado tanto quanto o anterior. Não é somente importante a resposta que o aluno apresentou sozinho a determinado problema, é necessário um conhecimento do processo que a criança realiza mentalmente, para que esta evidencie a sua zona de desenvolvimento proximal de forma a que se possa actuar positivamente e progressivamente sobre ela, mas isso só é possível se realizado com a mediação do professor ou de colegas mais experientes. A boa aprendizagem será aquela que consolida e sobretudo cria zonas de desenvolvimento proximal sucessivas.

Desta forma, é de salientar o quanto a aprendizagem interactiva permite que o desenvolvimento avance e a importância que as trocas interpessoais podem ter na constituição do conhecimento. Através do conceito de zona de desenvolvimento proximal, Vygotsky realça o quanto a aprendizagem influencia o conhecimento.

Segundo Bruner (1997), Piaget nunca descurou a importância da interacção com o ambiente, mas para ele a aprendizagem dependia, em primeiro lugar, do estádio de desenvolvimento em que se encontrava o sujeito enquanto, para Vygotsky, a aprendizagem ocorre num processo que caminha do plano social – relações interpessoais – para o plano individual interno – relações intra-pessoais.

Implicações Pedagógicas da perspectiva Vygotskiana

Podemos, agora, resumir as principais implicações da perspectiva Vygpotskiana como sendo as seguintes:

- o processo de constituição de conhecimentos deve ser considerado tão importante quanto o seu produto (avaliação final);

- o professor não é apenas, nem aquele que "ensina" para que os alunos passivamente aprendam, nem aquele mero organizador de propostas de aprendizagem que os alunos desenvolvem sem a sua intervenção. Ele é o mediador de todo o processo de desenvolvimento, cabendo-lhe: propor desafios aos seus alunos, ajudando-os a resolvê-los; proporcionar actividades de grupo, orientando os alunos mais adiantados para junto dos outros; permear todas as actividades com diálogos interactivos, de forma a reorganizar continuamente as mesmas, através do que consegue inferir destes diálogos, ao nível da zona de desenvolvimento proximal dos seus alunos;
- o aluno não deve descobrir as suas respostas sozinho; aquilo que o aluno, hoje, realiza com a ajuda dos demais acabará por realizar sozinho amanhã;
- a aprendizagem escolar implica apropriação de conhecimentos, por isso, é necessário um planeamento constante e uma reorganização contínua de experiências significativas para os alunos;
- a reorganização das experiências de aprendizagem deve considerar o nível de colaboração e ajuda que o aluno ainda necessita para chegar a produzir determinadas actividades de forma independente;
- o diálogo deve permear constantemente o trabalho escolar, por isso, a linguagem é dos instrumentos psicológicos mais importantes neste processo;

– os alunos devem ser integrados em turmas heterogéneas rompendo-se, aqui, o preconceito de que as turmas devem ser organizadas buscando-se uma homogeneidade.

Devemos ter consciência de que uma abordagem vygotskiana "deve não só analisar o ensino e a aprendizagem como parte das práticas institucionais mas criar actividades fundamentalmente novas. Por outras palavras, produzir aprendizagem, facilitando novas formas de mediação" (Matos, J., sem data, p.23).

Referindo-nos, agora, à proposta que desenvolvemos, é de salientar que esta, pelas características físicas do material que apresenta, permite um forte envolvimento dos alunos, podendo constituir-se como uma fonte de diálogos constante, quer entre os alunos, quer entre o professor e esses mesmos alunos.

É claro que a forma como as potencialidades do material se podem revelar e aproveitar depende muito da atitude do professor e da sua própria perspectiva de ensino e aprendizagem, bem como da sua experiência profissional, da sua formação, das suas crenças, intuições, etc. Contudo, se o professor assumir um papel mediador durante a aplicação da proposta com o "Ábaco dos Inteiros", tentando aperceber-se da zona de desenvolvimento proximal de cada aluno, nos diálogos que poderá estabelecer com estes, poderá conduzi-los no sentido de criar zonas de desenvolvimento proximal sucessivas, que fomentem uma aprendizagem significativa das operações com números inteiros relativos. Neste sentido, a proposta que desenvolvemos permite uma abordagem vygotskiana da matéria em causa, o que, em nosso entender, enriquece o trabalho que nos propusemos realizar, no mínimo, porque tem em conta esta perspectiva tão actual, independentemente dos resultados de que ainda não dispomos e que vão depender, como já referimos, em larga medida, do papel assumido pelo professor, na sua prática.

A importância da "compreensão" no processo de ensino e aprendizagem da Matemática

Numa investigação conjunta levada a cabo por Hiebert e Carpenter (1992), estes autores concorrem com o que temos vindo a explanar e afirmam o que, tantas vezes, é óbvio, mas nem sempre é simples de alcançar:

> "Uma das ideias mais geralmente aceites pela comunidade de educação matemática é que os alunos deveriam compreender matemática (...) a compreensão é um aspecto fundamental da aprendizagem e os modelos de aprendizagem deveriam tê-la em conta." (Hiebert, J. & Carpenter, T., 1992, p.65)

Na referida investigação, é bem patente a preocupação com a compreensão real das questões matemáticas. Os autores defendem insistentemente que a compreensão é um aspecto fundamental do ensino e que, portanto, os modelos de ensino (que estão directamente ligados a quem ensina, ou seja, aos professores) têm que atender a este aspecto fundamental – a compreensão.

Hiebert e Carpenter definem *compreensão* da seguinte forma: é a maneira como a informação é representada e estruturada. Mais especificamente, defendem que um procedimento ou facto matemático é entendido quando integra uma estrutura interna, sendo que o grau de entendimento é determinado pelo número e força dessas conexões internas.

Ora, esta ideia reporta-nos de imediato para Piaget (1983), no que respeita ao equilíbrio e progressão das estruturas mentais e cognitivas através de processos de assimilação e acomodação. Mais do que isso, vai de encontro à presente questão de investigação, pois foca-nos na consciencialização da existência de uma estrutura interna do aluno, a partir da qual ele há-de progredir para uma outra mais evoluída, dependendo do número e força das conexões por ele estabelecidas internamente.

Em nosso entender, um dos possíveis focos das dificuldades existentes na aprendizagem da multiplicação de números inteiros relativos poderá ser exactamente este – a de não estarem a ser feitas conexões com a estrutura interna já existente – o que estará a ser promovido pelos próprios professores no ensino da mesma.

O que se passa é que 2x3 é, obviamente, 6 para o aluno e para o professor, que, a quem duvidar, rapidamente esclarece, fazendo dois grupos de três objectos e concluindo que são 6 objectos que daí resultam. Mas (-2)x(-3) é, abstractamente, também 6!, para o aluno e para o professor, que, desta vez, a quem duvidar, pacientemente explica o resultado por aplicação da Propriedade distributiva da Multiplicação em relação à Adição, juntamente com a noção de elemento simétrico, numa demonstração que nem é imediata nem intuitiva, como, até esta altura, sempre tinha sido.

O *National Council of Teachers of Mathematics* (1991), nas Normas curriculares que propõe para o ensino da Matemática, refere-se de forma relativamente vaga a esta questão. Ainda assim, sugere, em particular, ao nível do ensino básico, uma metodologia de exploração de padrões e regularidades, que pode revelar-se positiva na questão que ainda há pouco focávamos de estabelecer conexões com estruturas internas já existentes:

> "Os números inteiros relativos e as operações com números inteiros relativos tornam-se uma extensão natural dos números inteiros quando vistos em termos de padrões:
>
> | | |
> |---|---|
> | 3 x 2 = 6 | 3 x –2 = -6 |
> | 3 x 1 = 3 | 2 x –2 = -4 |
> | 3 x 0 = 0 | 1 x –2 = -2 |
> | 3 x –1 = -3 | 0 x –2 = 0 |
> | 3 x –2 = -6 | -1 x –2 = 2 "(p.119) |

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991),

> "Os padrões estão por toda a parte. O currículo de Matemática deve ajudar a sensibilizar os alunos para os padrões que encontram diariamente e para as descrições ou modelos matemáticos destes padrões e relações. A capacidade de construir um modelo matemático é um elemento fundamental e poderoso que merece ênfase contínua no currículo." (p. 120)

Esta abordagem, contudo, não responde a dificuldades que advenham do facto de o aluno necessitar de uma conexão com o sentido operatório concreto que dá à multiplicação. Por isso, por si só, pode revelar-se insuficiente, tal como a que referimos anteriormente (utilizando as propriedades da multiplicação), ainda que por razões diferentes.

É natural que o processo de reorganização mental dos alunos, quando se lecciona a multiplicação de números negativos, dependa, de certa forma, das representações que já foram criadas da operação de multiplicação. Por conseguinte, é essencial que os professores se sensibilizem para este aspecto que se revela tão importante: as representações mentais e estruturação cognitiva já existente de determinada ideia ou assunto matemático influenciam as novas apreensões e relações que serão estabelecidas. Esta é, aliás, uma opinião consensual de vários autores:

> "As experiências passadas criam uma rede mental que o aprendiz usa para interpretar e compreender novas experiências e informação. (Ausubel, 1968, Wittrock, 1994, citados em Hiebert & Carpenter, 1992, p.70)

> "As pessoas tentam continuamente compreender e pensar sobre o novo em termos do que já conhecem." (Glaser, 1984, p.100, citado em Hiebert et Carpenter, 1992, p.70)

Também o *National Council of Mathematics* (2000) não deixa de dar o seu contributo para o mesmo alerta:

> "Quando os alunos podem ligar ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura. A Matemática não é uma colecção de correntes ou regras isoladas, embora esteja, por vezes, dividida e apresentada desta maneira. A Matemática é, antes, um campo integrado de estudo." (p.64)

Os materiais manipuláveis

O uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática tem sido defendido, amplamente, ao longo dos tempos por psicólogos (como por exemplo, Piaget, Bruner e Dienes) e contemplado nas orientações nacionais para o ensino da Matemática (através do Departamento de Educação Básica) e ainda nas normas propostas pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991). Para além disso, os materiais manipuláveis também têm sido alvo de alguma investigação educacional, que referiremos de seguida.

A teoria piagetiana, por exemplo, sugere que as crianças até certa idade (13-14 anos) não conseguem pensar sobre "coisas" que não sejam representações mentais de objectos concretos com os quais ela teve contacto nas suas experiências. Para as crianças que estão, por exemplo, no 7.º ano de escolaridade (idade média = 12 anos), na transição do estádio das operações concretas para o estádio das operações formais, seria benéfico que trabalhassem com uma variedade de materiais concretos e manipuláveis. Sublinhe-se que , para Piaget (1983), é pela acção do sujeito sobre os objectos que o conhecimento se constrói, ou seja, o desenvolvimento cognitivo depende da acção, logo, as crianças precisam de se ocupar com actividades apropriadas, que lhes permitam uma total liberdade de manipulação com objectos concretos.

Além de Piaget, também Bruner (1971) deu ênfase à utilização de materiais concretos e manipuláveis. No entanto, enquanto para Piaget, o uso desses materiais nos aparece quase como uma consequência obrigatória do estádio de desenvolvimento em que a criança se encontra, Bruner não é tão limitativo. Para Bruner (1971), independentemente da idade do sujeito, este iniciará sempre a compreensão de determinado objecto através do modo de representação *enactivo*, ou seja, através da acção. Ora, para que isso ocorra, devemos proporcionar ao sujeito experiências com materiais concretos e manipuláveis.

Shulman (1971), refere-nos isso mesmo:

"Bruner quase sempre começa dando ênfase à produção e manipulação de materiais." (p.181)

Recorde-se que Bruner (1971), a propósito do processo de formação de conceitos na criança, descreve um movimento que se processa entre três modos de representação: *enactivo*, *icónico* e *simbólico*. Assim, é no modo de representação *enactivo* que a criança manipula directamente os materiais, e é a partir dessa primeira representação que se move para os outros modos de representação dos conceitos.

Dienes (1971) também deu grande importância às experiências com materiais manipuláveis, durante a aprendizagem, defendendo que "a criança que alcança uma solução para o problema, fá-lo porque consegue visualizar, ou imaginar, de alguma maneira, o tipo de situação à qual tem que chegar para resolver esse problema" (p.223).

De acordo com Bart (1971), Dienes aproxima-se, por exemplo, de Piaget e Bruner em alguns aspectos, como os estádios em que divide a formação de um conceito:

1) o primeiro estádio é quase inconsciente e consiste na participação em experiências nas quais o sujeito contacta com elementos relacionados com o conceito, usualmente, em situações concretas;
2) o segundo estádio envolve um direccionamento lento e gradual, ao longo do qual o sujeito se aproxima do significado do conceito;
3) o último estádio envolve um momento de *insight* e compreensão em que o sujeito, de repente, apreende o conceito. (p.241)

Na progressão que Dienes defende para a formação dos conceitos, podemos, pois, verificar importante papel que este também atribui às experiências com materiais manipuláveis e concretos.

De facto, parece-nos clara a importância da utilização de materiais manipuláveis na construção do conhecimento, não só em determinadas faixas etárias, mas, de um modo geral, em qualquer aprendizagem que se realize.

Donavan Johnson (1971) também justifica esta importância, sublinhando que "o homem pensa em termos de representações tangíveis e visuais" (p.349) e, "dado que a Matemática é uma ciência abstracta e lógica, os professores de matemática têm uma necessidade especial de usar materiais instrutivos, que liguem a realidade às ideias" (p.349).

O *National Council of Teachers of Mathematics* (1991) também apela a que se dê maior atenção à utilização de materiais concretos (p.86) e, referindo-se, em particular, aos alunos entre o 5.º e 8.º anos, deixa a seguinte recomendação:

> "A evolução dos alunos (...) é acompanhada da sua capacidade de pensar de forma cada vez mais abstracta. No entanto, ainda neste período, deverão ser as experiências concretas a proporcionar a construção do seu conhecimento. Destas experiências, os alunos poderão abstrair ideias e conceitos mais complexos e elaborados. A utilização de linguagem, escrita e oral, ajuda os alunos a clarificar o seu pensamento e permite explicitar as suas observações acerca da construção das suas ideias em matemática." (p.81)

Aqui, estão bem explícitas as vantagens e potencialidades da utilização de materiais manipuláveis:

- valem por si só na iniciação da formação de um conceito, por tudo o que já referimos pelas vozes de Piaget, Bruner e Dienes;
- constituem-se como uma ponte entre a realidade tangível e as ideias matemáticas, permitindo uma evolução facilitada para representações mais complexas e abstractas dos conceitos;
- são excelentes oportunidades de comunicação matemática, que ajudarão os alunos a reflectir, "clarificar, refinar e consolidar o seu pensamento matemático" (National Council of Teachers of Mathematics, 1991, p.7).

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), nas recomendações para a Matemática na Educação Básica, e referindo-se, em particular, á aprendizagem dos números e cálculo, reforçam o papel destes materiais:

> "O trabalho exploratório com situações problemáticas, envolvendo objectos físicos e em que é possível "ver" os efeitos das operações, é fundamental para o desenvolvimento do significado destas e para contextualizar a aprendizagem dos procedimentos de cálculo." (p.25)

Estes autores acrescentam ainda:

> "Materiais manipuláveis e modelos de representação contribuem para a integração dos processos na rede conceptual, isto é, para uma compreensão consistente. Além disso, facilitam a comunicação, ao permitirem que os alunos falem de objectos concretos quando explicam os seus raciocínios." (p.26)

A propósito, do alargamento do conceito do número, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) defendem que:

> "A visualização, através de modelos figurativos assim como a contextualização dos cálculos e a valorização de diversas estratégias na sua execução, pode ajudar a atribuir sentido às diversas acções e a desenvolver uma compreensão conceptual e uma destreza consciente do cálculo." (p.54)

Através destas últimas opiniões e recomendações, apercebemo-nos que se o uso de materiais manipuláveis é importante em qualquer aprendizagem, mais o é se se tratar de uma aprendizagem que envolva números e operações. Por isso, para a proposta que desenvolvemos da multiplicação de números inteiros relativos, escolhemos um material manipulável – o "Ábaco dos Inteiros".

Apesar de todas as vantagens que já foram apontadas acerca dos materiais manipuláveis, Donovan Johnson (1971) chama a atenção, porém, para os critérios a ter em conta na escolha ou construção destes materiais: eles devem, entre outras coisas, ajudar o professor a comunicar as ideias e a promover actividades de descoberta. Enfim, o material "deve fazer algo que não poderia ser feito tão bem ou melhor sem ele" (p.351).

Por seu lado, Julianna Szendrei (1996) chama a atenção para o facto dos materiais manipuláveis terem uma longa história, entre eles, o Ábaco é dos materiais com raízes históricas mais antigas no processo de representação e operação de números. No entanto, a autora sublinha que estes materiais "nem sempre são aceites prontamente ou usados de forma adequada" (p.411). Assim sendo, J. Szendrei defende que o uso de materiais concretos na aula de matemática não produz automaticamente um bom ou mau efeito, pelo que o professor deve pensar sobre a eficácia desses materiais e planear cuidadosamente estas actividades, de acordo com os objectivos que se pretendem.

Aliás, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) também recomendam o mesmo:

> "O recurso aos materiais manipuláveis e aos instrumentos tecnológicos, por exemplo, é imprescindível como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares. Mas trata-se de um meio e não um fim, o essencial está na natureza da actividade intelectual dos alunos." (p. 25)

Tentámos atender a estes cuidados, planeando devidamente a Proposta de Ensino da Multiplicação de números inteiros relativos com o "Ábaco dos Inteiros". Fizemo-lo de acordo com os objectivos nucleares da actividade, que passavam pela compreensão da operação de multiplicação perante o seu alargamento aos números inteiros negativos, e pelo reajustamento e evolução de conceitos que isso implicaria.

Planeámos as actividades das aulas com um arranque feito sempre a partir da acção e manipulação exercidas pelos alunos, no Ábaco, e de modo a:

- que permitissem momentos de comunicação matemática, a nível oral e escrito;

- que os alunos, gradualmente, se autonomizassem do próprio material, à medida que progridem para formas de representação mais abstractas, não ficando, eternamente, dependentes do seu contacto.

II.2 - Números e operações

O ensino e a aprendizagem das operações

Ainda hoje, muitas pessoas associam a Matemática escolar à Aritmética, pois, durante muito tempo, saber Matemática, na escola, correspondia a saber as tabuadas e a saber fazer contas. Com a introdução das calculadoras e a sua universalização, o papel atribuído ao Cálculo foi reexaminado tendo em conta os grandes objectivos actuais da Matemática, o que obrigou a repensar o ensino dos Números e Operações.

Além disso, muitas vezes, pensa-se que o facto de uma criança conseguir obter o resultado correcto de uma dada operação é um desfecho simples de uma tarefa educativa que foi bastante fácil. No entanto, esta aparência esconde uma realidade bem mais complexa, que envolveu, com certeza, um elevado número de processos psicológicos ligados à evolução da personalidade da criança, para os quais o papel do educador não é menos complexo.

A propósito, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) recomendam o seguinte:

> "O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas, sim, uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento." (p.47)

Ponte, Matos e Abrantes (1998) chamam a atenção para várias lacunas da investigação matemática que se verificam ao nível dos Números e Operações. No que respeita aos Números (referindo-se aos números naturais e racionais), referem, claramente, que "faltam trabalhos estudando detalhadamente os processos de construção do conceito de número, e investigações que procurem caracterizar o sentido de número, por exemplo." (p. 133) e sugerem que um enquadramento vygotskiano dos mesmos seria particularmente vantajoso.

No que respeita às operações aritméticas elementares, há um tipo de trabalhos que foca o desempenho dos alunos de diversos ciclos nas quatro operações (Amaro, Cardoso e Reis 1996b; Leal e Kilborn, 1981; Ramalho, 1994; in Ponte, J.P., Matos, J.M. e Abrantes, P., 1998, p. 134) ; e outro tipo de trabalhos que focam os processos utilizados pelos alunos na resolução de problemas envolvendo as quatro operações (Célia Alverca, 1990; Luísa Morgado, 1991; Pedro Palhares, 1992, e Manuela Azevedo, 1996; in Ponte, J.P., Matos, J.M. e Abrantes, P., 1998, p. 134).

No estudo de Ramalho, conclui-se que os alunos portugueses dão uma maior percentagem de respostas correctas quando os exercícios envolvem a aplicação directa de algoritmos, apresentando, nestes itens, melhor média que a internacional. Em contrapartida, nos itens que envolvem raciocínios matemáticos mais complexos, a prestação dos alunos portugueses é mais baixa do que a média internacional.

Entre os trabalhos sobre operações que foram mencionados, é de salientar que apenas um se debruça sobre a multiplicação – o que foi realizado por Luísa Morgado, em 1991, de que falaremos já de seguida, quando nos debruçarmos exclusivamente sobre esta operação.

Não temos, por isso, uma base teórica desenvolvida em Portugal sobre os Números e Operações. Por isso, tomámos como referência uma proposta que Miliaret (1975) nos apresenta, na sua obra, sobre o ensino das operações. A abordagem que este autor fez pareceu-nos concordante, quer com as orientações definidos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991), ao nível das operações, quer com as perspectiva psicológicas que já referimos, quer ainda com as recomendações do Departamento de Educação Básica para o ensino da Matemática.

Antes de mais, devemos aprofundar os conhecimentos sobre as etapas pelas quais a criança deve passar na aprendizagem de qualquer operação, de forma a assegurar a construção sólida das "suas" bases matemáticas.

Mialaret (1975) não distingue etapas rígidas, mas antes aspectos principais de todo o processo de aprendizagem de uma operação, os quais tanto podem acontecer sequenciados como em simultâneo. São eles:

<u>Aspecto Nº 1</u>: *Acção realizada de facto*

O autor defende que:

> "É indispensável que a criança manipule, que manipule sempre. Não simplesmente pelo prazer de manipular, porque a este respeito eminentes psicólogos, como J. Piaget, mostraram que a manipulação não se basta a si mesma (...). Se se pretende que, mais tarde, a criança possa reflectir, isto é, possa representar as operações envolvidas num problema, é necessário, e isto parece uma verdade de La Palisse, que elas tenham, primeiro que tudo, feito e refeito concretamente as operações que devem representar.(...) A operação manual deve preceder sempre a operação aritmética." (Miliaret, 1975, p.42)

Este aspecto a que Miliaret se refere transporta-nos para o que Bruner também defendia como sendo o primeiro modo de representação cognitiva, por parte da criança – o modo enactivo -, onde o conhecimento, segundo ele, surgia através da acção.

Também encontramos indicações neste sentido nas recomendações do Departamento de Educação Básica para a Matemática, quando se chama a atenção para o seguinte:

> "A aprendizagem requer o envolvimento das crianças em actividades significativas. (...) não adianta ensinar coisas novas de modo expositivo se as crianças não tiverem oportunidade de viver experiências concretas sobre as quais essas explicações podem fazer sentido" (Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., 1999, p.25)

Acrescenta-se ainda que:

> "O trabalho exploratório com situações problemáticas, envolvendo objectos físicos e em que é possível "ver" os efeitos das operações, é fundamental para o desenvolvimento do significado destas e para contextualizar a aprendizagem dos procedimentos de cálculo." (Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I., p.46)

As afirmações de Mialaret e as recomendações anteriores para a Matemática do Ensino Básico, por si só, bastariam para nos atrevermos a afirmar que a abordagem tradicional da multiplicação de números relativos, baseada na demonstração abstracta da Regra dos Sinais (suportada pelas

Propriedades da Multiplicação), em nada contribui para uma aprendizagem significativa desta matéria. Isto, porque se descura, desde logo, o sentido concreto da operação e a acção, que devem acompanhar a fase inicial do ensino de qualquer operação ou o alargamento dessa operação a um conjunto de números mais abrangente, como é o caso do alargamento da multiplicação ao domínio dos números inteiros relativos.

Mas vale a pena seguirmos com outros aspectos importantes da aprendizagem de uma qualquer operação, nos quais o sucesso deste primeiro também influenciará.

<u>Aspecto Nº 2</u>: *Acção realizada acompanhada de linguagem*

Aqui, o autor acrescenta que a acção deve ser acompanhada de linguagem própria, devendo ser adquirida ao mesmo tempo que se desenvolve a actividade da criança, apoiando-se mutuamente. O autor vai mais longe, defendendo que, neste aspecto, pais e educadores devem envolver-se, repetindo os diferentes exercícios sob várias formas, a fim de assegurarem solidamente as ligações entre os vários aspectos do pensamento matemático. Mais, sugere que este aspecto não é difícil de alcançar, desde que haja, obviamente, este envolvimento dos educadores, já que as possibilidades de estabelecer relações entre certas acções concretas e a sua expressão na linguagem são, mais ou menos, aquelas que a criança conhece.

É interessante verificar que este aspecto também é evidenciado por Vygotsky, que defendia que este sistema simbólico era dos mais importantes mediadores nas relações sociais e, portanto, fundamental no desenvolvimento cognitivo. Vygotsky, citado por Rabelo (2002), refere que:

> "Os elementos mediadores na relação entre o homem e o mundo – instrumentos, signos e todos os elementos do ambiente humano carregados de significado cultural – são fornecidos pelas relações entre os homens. Os sistemas simbólicos, e particularmente a linguagem, exercem um papel fundamental na comunicação entre os indivíduos e no estabelecimento de significados partilhados que permitem interpretações dos objectos, eventos, e situações do mundo real." (p.50)

De facto, este aspecto assume uma importância fulcral no processo de ensino / aprendizagem, pois “grande parte das acções do professor e dos alunos na aula tem, de um modo directo ou indirecto, uma forte componente verbal” (Menezes, L., 1997, p.5), pelo que a qualidade das aprendizagens depende, em grande parte, da qualidade do discurso que as acompanha e, por isso, Miliaret chamava a atenção para as responsabilidades dos educadores, a este nível.

A propósito, convém referir que o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991) também tem revelado a importância da linguagem, do discurso e da comunicação na aula de Matemática. Numa das normas de define para os alunos do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, - A Matemática como comunicação -, recomenda que estes alunos “deverão ter a oportunidade de utilizar a linguagem para comunicar as suas ideias matemáticas. (...) As oportunidades para explicar, fazer, conjecturar e defender as suas próprias ideias, oralmente e por escrito, podem estimular uma compreensão mais profunda de conceitos e princípios” (p.93).

Neste sentido, acrescentam que os professores devem favorecer “a comunicação em matemática através de perguntas ou colocando aos alunos situações problemáticas em que eles se envolvam activamente” (p.94).

<u>Aspecto Nº 3</u>: *Condução da narração*

Segundo Miliaret (1975), este aspecto ganha corpo quando:

> “(...) a criança pode descrever, sem simultaneamente executar, as acções que tenha realizado. (...) Desde então, a linguagem da criança não tem nada de artificial, pois traduz unicamente uma experiência real e sua. Mas o gesto substitui o objecto e a linguagem utilizada, independentemente da situação que descreve(...)” (p.43).

Fundamentalmente, a condução da narração permite à criança agrupar situações que equivaleriam à repetição de uma acção que já lhe é familiar.

Embora o segundo aspecto e este possam ser confundidos ao nível do papel da linguagem, há diferenças que importa evidenciar. No segundo aspecto, o da *acção acompanhada de linguagem*, é enfatizado o papel da linguagem e da comunicação como elementos mediadores entre o professor e os próprios alunos, bem ao jeito da perspectiva vygotskiana. Contudo, neste terceiro aspecto, da *condução da narração*, a linguagem é sobretudo um instrumento da criança, que tem agora a possibilidade de utilizar os seus próprios meios de comunicação para descrever as suas experiências de aprendizagem, independentemente de as acompanhar da acção operatória ou não.

Aspecto Nº 4: *Acção com material não figurativo*

Já nos aspectos precedentes, a linguagem e o gesto constituem uma certa abstracção. Nesta altura, distingue-se a possibilidade de uma esquematização da realidade, utilizando material não figurativo (como p. ex.: peças de madeira, fichas, etc.), pelo facto de as acções concretas irem perdendo originalidade à medida que se vão repetindo.

A questão do gesto, do aspecto anterior, continua a assumir clara importância visto que, como defende Wallon, realiza-se em condições despidas do concreto e com um material idêntico para todas as situações (in Mialaret, 1975, p. 45).

Novamente, sublinhamos o facto de se estar, talvez, a dar pouca importância, a estes aspectos, quando se lecciona a multiplicação de números negativos. Até aqui, nada do que se vê nos manuais nos sugere atenção com algum destes aspectos a não ser, vagamente, o segundo e terceiro aspectos, quando apresentam alguns exemplos de aplicação da multiplicação com números inteiros relativos associados a situações de dívidas ou a esquemas ilustrativos de subidas e descidas sucessivas de degraus em escada, etc. Todavia, ainda que estas situações permitam uma exploração verbal e comunicativa, nenhuma delas se baseia em materiais concretos e em acções que se possam desenvolver no imediato de uma aula.

Por isso, esta investigação, que se suporta no uso de materiais manipuláveis como o "Ábaco dos Inteiros", tenta colmatar a maior lacuna que encontrou em todas as propostas já existentes: a lacuna da acção, a lacuna do gesto, a lacuna, portanto, do fundamento de qualquer operação (incluindo a multiplicação de números inteiros negativos).

Tentámos conceber a proposta para o ensino de Multiplicação de números inteiros relativos tendo em conta estes aspectos. Sabemos que, às vezes, a tentação de ir mais depressa é grande, mas tudo o que já foi referido nos leva a crer que esse esforço, por parte dos professores, melhorará a qualidade das aprendizagens da criança:

> "(...) é necessário resistir se se pretende que a linguagem matemática tenha algum significado para a criança e se se pretende construir com ela este edifício que deve mergulhar todas as suas raízes numa experiência real do jovem aluno". (Miliaret, 1975, p.45)

Aspecto Nº 5: *Tradução gráfica*

Este aspecto diz respeito à tradução através de um desenho mais concreto ou de um esquema simplificado da situação operatória, que foi progredindo nos aspectos anteriormente mencionados. Mialaret (1975) chama a atenção, no entanto, que "os processos devem ser de duplo sentido: ir de operação concreta à tradução pelo desenho, mas ir também da tradução simplificada e esquematizada até à operação concreta". (p. 46). Este autor acrescenta ainda que "muitas inadaptações matemáticas, devidas a uma falta de interesse, têm aqui a sua origem, porque a criança – e, mais tarde, o adolescente – não reconhecem nunca os laços que existem entre o ensino formal e a realidade"(p. 45, 46).

Cabe-nos a nós, investigadores e profissionais do ensino de Matemática, olhar humildemente para as falhas com que temos vindo a compactuar e fazer um esforço para contribuir para a mudança deste cenário de ruptura, que, tantas vezes, podia ser evitado em níveis tão elementares.

A proposta que apresentámos com o "Ábaco dos Inteiros" tentou considerar estes aspectos, na tentativa de contribuir para evitar estas inadaptações matemáticas de que são alvo tantas crianças.

Aspecto Nº 6: *Tradução simbólica*

Quando os aspectos anteriores estão assegurados, caminha-se então para o culminar da compreensão da operação, através da sua tradução simbólica por meio de pequenos sinais que separam os dados numéricos. No caso da multiplicação de números negativos, traduzir-se-ia na tradução matemática, p. ex. de (-3)x(-2)=+6. Não se trata aqui de ensinar a criança a executar a operação, mas de promover uma ligação sólida entre a acção e a expressão (-3)x(-2)=+6 ou, inversamente, perante a expressão (-3)x(-2)=+6, a criança ser capaz de indicar uma acção concreta simples correspondente a esta fórmula matemática.

Devemos, contudo, interrogar-nos sobre se este aspecto não tem vindo a ser descurado. Isto porque, quando se ensina a multiplicação de números inteiros relativos utilizando as propriedades da multiplicação descontextualizadas de qualquer acção ou plano real e concreto, impossibilita-se, desde logo, a compreensão da operação. O aluno pode executar o resultado (-3)x(-2)=+6 correctamente, mas não há este importante movimento de vaivém de que Mialaret nos fala, pelo que, a criança, confrontada com a expressão (-3)x(-2)=+6, não é capaz de indicar uma acção concreta correspondente a esta fórmula, pois não lhe confere qualquer significado. A criança não consegue realizar a importante reversibilidade do pensamento, que é característica da compreensão de qualquer operação e tão largamente defendida, por isso mesmo, por Piaget (in Sprinthall & Sprinthall, 1993), quando afirmava que a criança não aceita uma operação a não ser na medida em que esta traduza claramente o que representa.

A propósito dos aspectos da tradução gráfica e da tradução simbólica, somos levados a sublinhar as semelhanças com os modos de representação icónica e simbólica que Bruner (1971) propunha. Este autor defendia que, após o modo de representação enactivo, em que a criança acedia ao conhecimento através da acção, depois a representava através de imagens (modo de representação icónico), caminhando progressivamente para um modo de representação desse conhecimento mais simbólico. Contudo, Bruner definiu estes três modos de representação gerais do conhecimento sem especificar, como Miliaret o fez, o papel de aspectos como o da linguagem, o da condução da narração e o tipo de acções com ou sem objectos figurativos, na evolução progressiva desses três modos de representação do conhecimento. Assim sendo, no contexto do ensino das operações, a abordagem de Miliaret, tendo subjacentes os três modos de representação do conhecimento sugeridos por Bruner (1971) e o destaque para o papel da linguagem que Vygotsky (1979) tão bem colocou como instrumento essencial da interactividade entre o sujeito e o meio social, pareceu-nos a abordagem mais completa, no sentido em que atende aos factores psicológicos que poderão sustentar uma aprendizagem significativa das operações.

É evidente que a evolução de todos estes aspectos e processos psicológicos que levam à operação matemática não é igual em todos os indivíduos. Por isso mesmo, é muito importante ter em conta os ritmos e níveis pessoais de cada um. No entanto, não devemos esquecer que:

> "O problema pedagógico não é conduzir, num dado tempo, as crianças a níveis diferentes, é conduzir, em tempos variáveis, todas as crianças a um certo nível: concretamente, na aprendizagem do cálculo, aquilo a que chamamos compreensão das operações. (...) Atribuamos, pois, muita importância a estes primeiros passos da iniciação ao cálculo, já que estamos em presença de uma actividade psicológica fundamental para a formação do espírito matemático." (Mialaret, 1975, p.51, 52)

Mialaret consegue dar ao problema do ensino das operações a visibilidade que este merece, e, depois, ainda faz referência às várias operações. Mas não chega a referir, concretamente, na sua obra, a multiplicação de números negativos.

Operação concreta vs. Operação matemática

Esta é uma questão que importa clarificar, pois, muitas vezes, estas duas operações são confundidas. Não há, de facto, uma correspondência biunívoca entre as operações concretas e as quatro operações elementares da Matemática. Aliás, uma grande parte da iniciação ao cálculo vai consistir, justamente, em estabelecer a relação entre uma e outra.

Os matemáticos são da opinião de que as dificuldades nas operações aritméticas desaparecem se a criança for treinada de modo a compreender o que é um conjunto e o seu cardinal. No entanto, os psicopedagogos, não menosprezando esta ideia, não podem deixar de constatar certas dificuldades ainda não resolvidas pelas crianças, a este respeito, as quais não se resumem à falta de compreensão do conjunto ou do seu cardinal.

Mialaret (1975), no seu estudo, não se debruça especificamente sobre os problemas da multiplicação de números negativos, referindo-se apenas à multiplicação de naturais, a qual, diz, "não parece apresentar grandes dificuldades no que respeita à compreensão" (p.63), mas depois, através de resultados obtidos em dois grupos submetidos a cursos elementares de aritmética, conclui que “os problemas que recorrem à multiplicação parecem mais difíceis do que aqueles nos quais basta aplicar a adição ou a subtracção.” (Miliaret, 1975, p. 64).

Na conclusão do seu estudo, onde agrupou, por percentagem de boas respostas, dos problemas aritméticos que tinha proposto, refere que, no caso em que a percentagem de boas respostas é inferior a 50%, “podemos afirmar que as noções são demasiado difíceis para a idade em que são apresentadas e que é preciso *experimentar apresentá-las melhor* ou *retardar o momento do seu estudo pela criança*”.

Ora, perante o problema de multiplicação de números negativos que tentámos abordar, optámos por experimentar apresentá-lo melhor, evitando, com isso, retardar o momento do seu estudo que era uma questão que também poderia ser discutida. No entanto, não queremos, com este “melhor”, assumir nenhum pretensiosismo, já que a clássica abordagem através das propriedades matemáticas está completamente correcta e não é nossa intenção pô-la em causa. Apenas defendemos que não contém em si mesma aspectos fundamentais que já foram aqui referidos no ensino das operações. Além disso, atrevemo-nos a assumir, tal como este estudo de Mialaret refere, que a progressão matemática não coincide exactamente com a progressão psicológica, e que cabe ao adulto (escola, pais e educadores) suportar a responsabilidade dos desânimos e situações críticas em Matemática, sem fechar os olhos às diferentes progressões.

Concluindo este ponto, Mialaret (1975) revela-nos que:

> “A progressão puramente matemática, ou seja, a progressão marcada pelo adulto que elabora os programas, ou redige os livros, deve ser substituída por uma progressão que considere a dificuldade psicológica própria dos problemas, para isso, há que proceder a revisões, que colmatem os aspectos aparentemente ilógicos desta progressão.”(p. 69)

No caso específico da multiplicação de números inteiros relativos, é ilógico explicar 2x3; 2x(-3) com exemplos concretos e, depois, (-2)x3 e (-2)x(-3) através das propriedades da multiplicação. Esta situação, assim apresentada aos alunos, sugere uma progressão ilógica que, tal como se disse, necessita de uma revisão.

Estas questões são de grande pertinência, não só porque interferem directamente na compreensão das operações, como já se invocou, mas, e não menos importante, porque, por vezes, "ferem de morte" a confiança da criança em si mesma e nas suas capacidades matemáticas, o que se revela devastador, no seu percurso escolar e além-escola. É exactamente o oposto que deverá acontecer e que os professores devem fomentar nos seus alunos – um ensino objectivado para a conquista de confiança, por parte do aluno, na sua capacidade de fazer matemática. Este é, aliás, um claro objectivo definido, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991, p. 6), para todos os alunos.

A operação de Multiplicação

De acordo com Ponte, Matos e Abrantes (1998), em Portugal, dentro dos trabalhos sobre operações mencionados anteriormente, apenas um se debruça exclusivamente sobre a Multiplicação – o de Luísa Morgado, realizado em 1991. O referido trabalho estuda as representações dos alunos, de uma turma do 1.º ciclo, sobre a multiplicação. Embora este estudo abranja apenas a 1.º ciclo e, por isso, apenas o domínio dos números inteiros e decimais positivos, ele contribui para um conhecimento mais aprofundado das concepções e representações que as crianças constroem na resolução de problemas que envolvem uma estrutura multiplicativa. Luísa Morgado (1991, in Ponte, J., Matos, J.M., Abrantes, P., 1998) distingue três destas estruturas: isomorfismo de medidas; uma medida; e produto de medidas. Baseando-se nesta classificação, Morgado estudou: a relação entre as representações mentais; estratégias (aditiva, multiplicativa ou contagem) de resolução desses problemas multiplicativos, e as respostas correctas ou incorrectas em cada problema de palavras.

Esta autora concluiu que o número de respostas certas dos alunos do 1.º ciclo aumentou em todos os problemas, do 2.º para o 4.º ano, e que os problemas multiplicativos onde os alunos apresentam mais dificuldades é nos que envolvem o produto de medidas, ou seja, os que envolvem estratégias de resolução baseadas numa abordagem da multiplicação como um produto cartesiano, ao invés da usual adição repetida.

Para que se entenda, Morgado (1993) distingue diversas estratégias usadas pelas crianças na resolução de problemas que envolvem a multiplicação, mas divide-as apenas em dois grandes grupos:

- Estratégias de <u>Adição repetida</u>: "esta estratégia consiste em adicionar o multiplicando o número de vezes indicadas pelo multiplicador"(1993, p.68). Por exemplo, considerando o primeiro factor como o multiplicador e o segundo factor como o multiplicando, teríamos que 3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12;
- Estratégias de <u>Produto Cartesiano</u>: "trata-se agora de uma estratégia mais elaborada e que demonstra da parte do sujeito uma completa compreensão da operação de multiplicação. Neste caso, procura-se encontrar o produto de duas quantidades. Agora, nenhuma delas é reduzida a um operador (...)" (1993, p. 69). Utilizando um exemplo da própria autora, referíamos a seguinte situação: Uma rapariga tem 4 blusas e 3 saias. Quantas combinações diferentes de blusas e saias pode vestir? R: 4 x 3 = 12 combinações diferentes!

  blusas saias

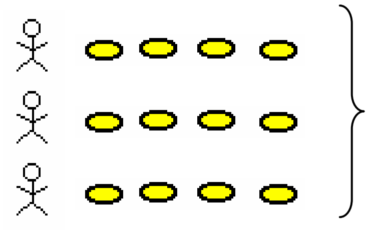
Visto que o estudo de Luísa Morgado (1991, in Ponte, J., Matos, J.M., Abrantes, P., 1998) apenas aborda os números positivos, pareceu-nos que seria interessante alargar um estudo deste tipo aos números negativos, em futuras investigações.

Brian Greer (1992) realizou uma investigação que aborda também a Multiplicação e ainda a Divisão, como modelos de situações. Este investigador é da opinião de que estas operações podem ser consideradas relativamente simples sob um determinado ponto de vista matemático, mas revela-nos que há aspectos bastante complexos nas mesmas, nomeadamente, os que dizem respeito aos modelos matemáticos adoptados em cada uma das situações operatórias que podem surgir.

Assim, no que respeita à Multiplicação, distingue quatro situações, sendo que só as aborda no domínio dos números inteiros :

- <u>Situação 1</u> – *Equal Groups* (que entendemos como a Adição repetida ou sucessiva, também referida por Luísa Morgado).

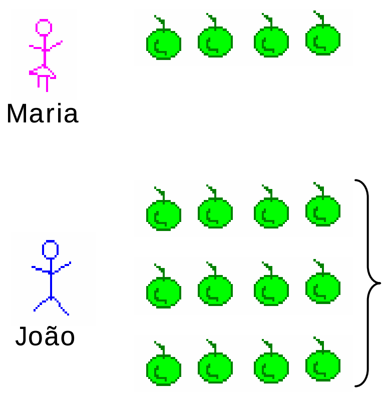
Exemplo: *3 crianças têm 4 bolos. Quantos bolos têm todas?*



3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12 bolos

- <u>Situação 2</u> – *Multiplicative comparison* (utiliza também a estratégia de Adição repetida, embora gerada por uma situação de comparação.

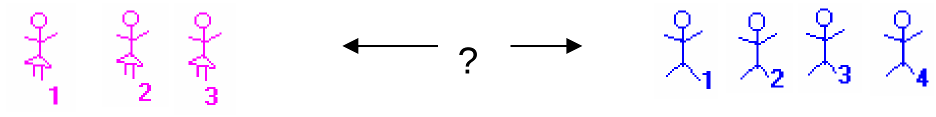
Exemplo: *O João tem três vezes o número de maçãs da Maria. A Maria tem 4 maçãs. Quantas maçãs tem o João?*

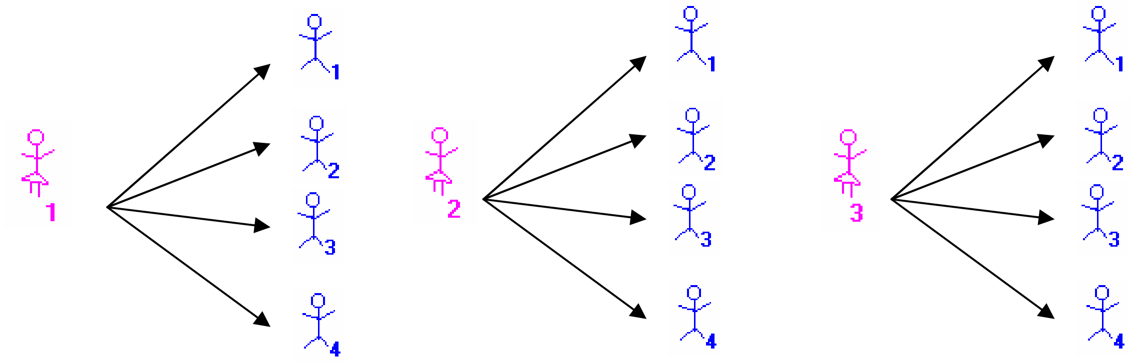


3 x 4 = 4 + 4 + 4 = 12 maçãs

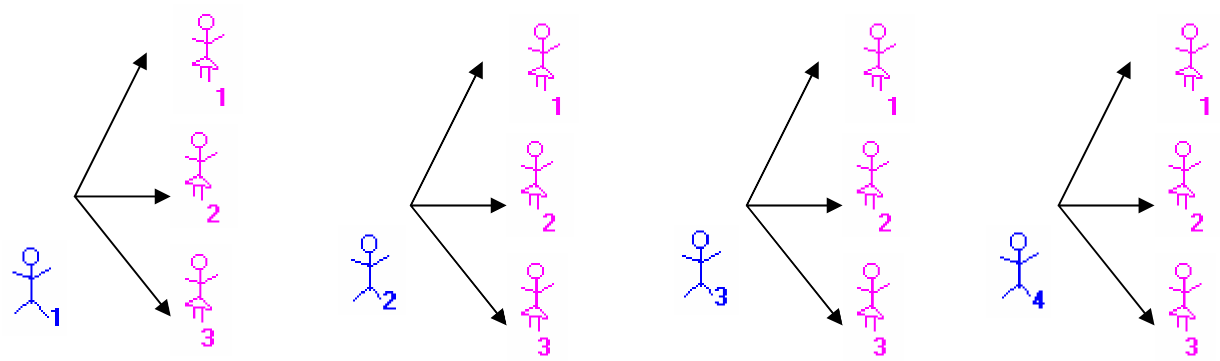
- <u>Situação 3</u> – *Cartesian product* (que entendemos como Produto cartesiano gerado por uma situação combinatória).

Exemplo: *Se 4 rapazes e 3 raparigas estão a dançar, quantos casais diferentes é possível formar?*





Ou …



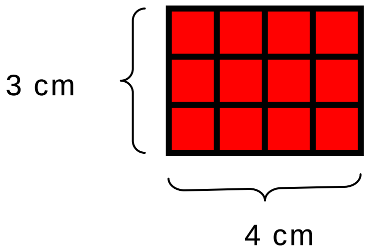
3 x 4 = 12 <u>casais</u> diferentes !

Neste caso, há uma simetria de papéis entre os dois números que se multiplicam. Se repararmos, quer haja 4 rapazes e 3 raparigas ou 3 rapazes e 4 raparigas, teremos sempre o resultado de 12 casais diferentes.

Tal como Morgado (1993) também havia referido no caso do produto cartesiano, aqui, não há distinção entre multiplicador e multiplicando. Este foi o caso em que os alunos do 1.º ciclo por ela investigados demonstraram mais dificuldades: “(...) Muito embora os alunos dos três anos mostrem usar estratégias diferentes, eles revelam muita dificuldade neste problema.” (Morgado, 1991, citada por Ponte, J.P., Matos, J.M., Abrantes, P., 1998, p. 136);

- <u>Situação 4</u> – *Rectangular area* (que entendemos também como um Produto cartesiano, pelo facto de os dois números – unidades de comprimento e de largura – representarem o mesmo papel, não havendo qualquer distinção entre multiplicador e multiplicando).

Exemplo: *Calcular a área do seguinte rectângulo.*



$3 \times 4 = 12\ cm^2$

Embora Brian Greer (1992) também não tenha estendido o seu estudo às situações envolvendo números negativos, interessou-nos explorar estas situações operatórias, pois elas permitiram-nos conhecer de forma mais profunda as representações e estruturas multiplicativas em que os alunos de 7.º ano se baseiam. À luz do construtivismo, este deverá ser o primeiro passo do professor, uma vez que este é o responsável pela sequência de apresentação de conhecimentos. Piaget (1983) defende que as crianças aprendem gradualmente à medida que se vão desenvolvendo intelectualmente, por isso, o processo de aprendizagem não pode ser acelerado pelo professor, devendo este ter claras noções sobre os conhecimentos prévios dos seus alunos, sobre os seus ritmos de aprendizagem, sobre a formação correcta ou incorrecta dos conceitos, enfim, sobre o seu desenvolvimento cognitivo e estruturas mentais.

Bruner (1971), que defende que a melhor sequência de apresentação do conhecimento não existe, realça também que essa apresentação deve ser organizada em espiral, ou seja, deve ser estruturada de modo a permitir que o indivíduo avance e recue dentro do mesmo tema, podendo rever e reflectir conteúdos já aprendidos. Daí, a grande importância dos conhecimentos prévios em qualquer aprendizagem, já que o autor refere que um mesmo assunto deve ser aprendido a diferentes níveis, em diferentes ocasiões, sendo o nível seguinte mais profundo e preciso que o anterior.

Concluindo, é extremamente importante conhecer as estruturas e estratégias multiplicativas dos alunos enquanto estes operam apenas com números positivos, para, depois, a partir dessas, permitir uma evolução segura para outras que abranjam os números negativos.

Luísa Morgado (1993) sublinha também estas ideias que, no fundo, resumem as implicações pedagógicas do Construtivismo:

> "Os programas delineados pelas autoridades competentes, bem como o ensino ministrado na sal de aula e daí decorrente, devem respeitar o nível de desenvolvimento psicogenético das crianças adaptando-se ao seu grau de conhecimento, não procurando ensinar-lhes noções para as quais aquelas não possuem a necessária estruturação cognitiva; por outras palavras, ao implementar um programa, é necessário propor a aprendizagem de um conjunto de conceitos para os quais o aluno possua os pré-requisitos indispensáveis à sua compreensão (...)." (p.23)

Nesta linha de pensamento neo-piagetiana, a autora descreve os aspectos fundamentais da actuação de um professor no processo do ensino /aprendizagem da aritmética:

> "1- Conhecer e respeitar a ordem hierárquica da psicogénese e introduzir os conceitos aritméticos de acordo com ela, tendo em conta os pré-requisitos cognitivos indispensáveis à sua construção;
> 2- Dominar a matéria e leccionar e conhecer o seu grau de dificuldade;
> 3- Encontrar e explorar com os alunos situações problemáticas orais(...);
> 4- Procurar encontrar situações problemáticas próximas da vida do dia-a-dia dos alunos(...);
> 5- Favorecer o diálogo (...);
> 6- Conduzir o aluno a verbalizar e explicitar as estratégias utilizadas na resolução de problemas (...);
> 7- Não incentivar a memorização das regras (...);
> 8- Introduzir a simbologia matemática escrita somente depois de as noções se encontrarem bem construídas pelos alunos (...);

9- Dar importância ao erro. Procurar analisá-lo com vista a descobrir onde o aluno falhou e agir em consonância" (Morgado, L., 1993, p.29, 30)

Note-se que nos pontos 3, 4 e 9 podemos verificar a importância dada à utilização de situações problemáticas e aos erros como pontos-chave da aprendizagem da aritmética. A autora justifica esta importância baseada numa visão piagetiana, considerando que

> "a aprendizagem operatória não se baseia na repetição nem no ensino directo de determinadas noções, mas na criação de situações de conflito cognitivo ou sócio-cognitivo. Estes mobilizam esquemas que se encontram em diversas fases de formação, os quais, ao entrarem em confronto, vão provocar a sua reorganização dando assim lugar ao processo cognitivo" (Morgado, L. , 1993, p.22).

Saliente-se ainda o ponto 7, ou seja, o não incentivo à memorização de regras. Invocando directamente o caso da multiplicação de números inteiros relativos e a famosa *Regra dos Sinais*, o que se passa é que, na maioria dos casos, a sua memorização é incentivada pelos próprios professores, antes mesmo de os alunos sequer lhe conferirem algum sentido. Em muitos casos, isto acontece, porque os próprios professores aprenderam assim na sua formação escolar e profissional e, ou essa aprendizagem não lhes criou qualquer conflito, não sentindo que poderia causar aos seus alunos, ou criou, e acabaram por não conseguir resolvê-lo. De qualquer das formas, pareceu-nos importante abrir uma outra perspectiva de abordagem das operações com números inteiros relativos, em especial, a multiplicação, tendo em conta todos estes aspectos psico-pedagógicos.

Ainda a propósito das situações conflituosas e daquelas que envolvem o erro, será oportuno saber quais as principais dificuldades detectadas nas situações que envolvem a multiplicação.

Brian Greer (1992) faz referência a algumas. Este investigador afirma que há alguns mal-entendidos na multiplicação e divisão, que têm a ver com a sobregeneralização do domínio dos números inteiros nestas operações, como sejam:

1- que a multiplicação transforma sempre algo em maior e a divisão, por seu lado, transforma sempre algo em menor;
2- a do aparecimento de números decimais no multiplicador – os alunos parecem apenas entender intuitivamente a multiplicação quando o multiplicador é um número inteiro – "multiplier effect" (De Corte et al, 1998, Greer & Morgan, 1986, Luke, 1998, in Greer, 1992, p. 290).

Estes podem ser pontos problemáticos a ser explorados na fase inicial de uma aprendizagem da multiplicação que se queira construir mais estável, até porque isso permitirá outra estabilidade em futuras aprendizagens relacionadas com esta operação quando a mesma se alarga aos números negativos.

Aliás, nas recomendações do Departamento de Educação Básica para o Ensino da Matemática, notam-se bem as preocupações com a ampliação do conceito de número e o reconhecimento desta possível fonte de dificuldades. Abrantes, Serrazina e Oliveira registam que:

> "A partir do 2.º ciclo, a aprendizagem dos números racionais (positivos) e, posteriormente, dos números relativos (inteiros, racionais e reais) está, normalmente, associada a dificuldades a que é necessário dar a maior atenção. (...) Trata-se de um processo lento e gradual que deve ser orientado para a compreensão e não para um domínio muito rápido de novas técnicas de cálculo." (p.54)

Por isso, estes autores defendem que é necessário combater "a tendência para a memorização de regras que são muitas vezes aplicadas em situações inadequadas, chegando a suceder que os alunos se confundem em cálculos que já pareciam dominar" (p.54).

Ora, este é, precisamente, o caso da *Regra dos Sinais* para a Multiplicação. Antes de memorizarem a regra, os alunos, normalmente, não demonstram dificuldades em calcular (-2) + (-3) = -5 , pois facilmente juntam as duas quantidades negativas não duvidando que o resultado é negativo. No entanto, depois de memorizarem a Regra dos Sinais para a Multiplicação, em que "menos por menos dá mais", confundem a sua aplicação acabando por começar a cometer erros como (-2) + (-3) = +5, justificando que este resultado é positivo "porque menos por menos dá mais", erro este que não cometiam até aqui. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) referem que os alunos fazem isto mesmo : "(...) memorizando regras da multiplicação do tipo *menos por menos dá mais*, usam-nas para adicionar, cometendo erros que seriam impensáveis na semana anterior" (p.55).

Brian Greer (1992), por seu lado, chama ainda a atenção para a falta de estudos nesta área, nomeadamente, de estudos de caso e de outros estudos com um grau de pormenor idêntico aos que já têm sido feitos para os estádios iniciais em que a multiplicação é introduzida. Este autor é da opinião que estudos similares a esses devem ser feitos a partir do ponto em que o domínio dos inteiros positivos se começa a estender para outros, como sejam, primeiro, os racionais positivos (onde se incluem os números decimais) e, depois, os inteiros relativos (onde se incluem os inteiros negativos), etc.

Com este trabalho, também procurámos preencher, no possível, uma parte desta lacuna, que, em Portugal, também existe e que já foi apontada por Ponte, Matos e Abrantes (1998), que referem que não existe sequer investigação básica nesta área (p.141). O estudo de caso que realizámos e a proposta de ensino e aprendizagem da multiplicação que desenvolvemos abrangem todo o domínio dos números inteiros, incluindo, portanto, os inteiros negativos. No entanto, mais estudos ainda seriam desejáveis numa área que ainda carece de bastante atenção por parte de investigadores em Educação Matemática.

II.3 – A multiplicação de números negativos

Dados históricos

De acordo com Courant e Robbins (1969), a redefinição das operações com números negativos teve que ser feita de modo a que as regras originais das operações aritméticas fossem preservadas:

> " Por exemplo, a regra (-1).(-1)=1, que aceitamos para governar a multiplicação de inteiros negativos, é uma consequência do nosso desejo de preservar a propriedade distributiva a(b + c) = = ab + ac. Se tivéssemos acordado que –(1 – 1) = –1 –1 = –2, enquanto que, do outro modo, teremos antes –1(1 – 1) = –1.0 =0." (p.55)

Os mesmos autores acrescentam ainda que foi preciso muito tempo para os matemáticos se aperceberem que:

> "a Regra dos sinais, juntamente com todas as outras definições que governam os números negativos e as fracções não podem ser *provadas*. Elas são criadas por nós para nos darem liberdade operatória, pelo facto de preservarem as propriedades fundamentais da Aritmética. O que pode – e deve – ser *provado* é, unicamente, com base nestas definições, que as Propriedades Comutativa, associativa e distributiva são preservadas" (p.55)

Courrant e Robbins (1941) revelam-nos que até Euler se remeteu a um argumento verdadeiramente pouco convincente na sua demonstração da Regra dos Sinais. Segundo os autores, Euler admitiu que (-1).(-1) podia ser +1 ou –1, mas acaba por excluir a hipótese de este produto ser (-1) porque –1 = (+1).(-1), logo (-1).(-1) "tinha" que ser +1.

Talvez pelo facto da Regra dos Sinais, muito provavelmente, ter surgido desta necessidade de preservar as Propriedades fundamentais da Aritmética, ou seja, ter surgido de necessidades mais abstractas do que concretas, a procura de um sentido real e concreto para a multiplicação de números negativos pode parecer um esforço vão. No entanto, dado que este assunto é introduzido no

7.º ano de escolaridade, em nosso entender, a construção ou descoberta desse sentido impõe-se e o esforço justifica-se.

Propostas que explicam a multiplicação de números inteiros negativos

Encontram-se diferentes tipos de propostas para explicar a multiplicação de números inteiros relativos. Segundo Crowley e Dunn (1985), estas podem ser separadas nas seguintes categorias: "por definição; através de modelos físicos; através do encontro de padrões; e por aplicação de princípios matemáticos."(p.253)

Dentro destas categorias analisaremos, primeiro, as de cariz mais abstracto, como sendo, as que usam definições ou princípios matemáticos; e depois, as mais intuitivas, que usam o encontro de padrões e os modelos físicos.

A primeira situação – explicação usando a definição – , normalmente, é apresentada aos alunos da seguinte forma:

> "Dados dois quaisquer números naturais, *a* e *b*, *(-a).(-b)=(a).(b)* . (...) Assim, depois desta definição ser apresentada, são dadas as seguintes regras aos alunos:
> - O produto de dois números com o mesmo sinal é um número positivo.
> - O produto de dois números com sinais diferentes é um número negativo." (Crowley, M.L., Dunn, K.A., 1985, p. 253)

Também no manual de Matemática de Inez Santos e Judite Barros (1995), encontrámos o seguinte texto para introduzir a multiplicação de números racionais:

> " O valor absoluto do produto de dois números racionais é o produto dos valores absolutos dos factores.
>
> O produto de dois números racionais é positivo se ambos são positivos ou se ambos são negativos.
>
> O produto de dois números racionais é negativo se os factores têm sinais contrários.
>
> O produto de dois números racionais é zero se pelo menos um dos factores é zero." (p. 131)

Segundo Crowley e Dunn (1985):

> "Quando os sinais dos números são introduzidos desta maneira, os alunos não ganham nenhum *insight* sobre o *porquê* de a multiplicação de números relativos comportar-se desta maneira. Dizem-lhes, meramente, que assim é, e nós assumimos que eles acreditam nisso de boa fé." (p. 253)

A explicação que se baseia em princípios matemáticos ou em propriedades aritméticas segue o seguinte modelo geral:

<u>Situação 1</u>

$2 \times 3 = ?$ ["duas vezes 3"]

$2 \times 3 = 3 + 3 = 6$

Nesta primeira situação, a multiplicação é entendida como a soma sucessiva da mesma parcela, em que essa parcela é um número positivo, portanto, facilmente concretizável e esquematizável.

<u>Situação 2</u>

$2 \times (-3) = ?$ ["duas vezes –3"]

$2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$

Aqui, a multiplicação é, novamente, entendida como a soma sucessiva da mesma parcela; no entanto essa parcela é um número negativo, não sendo tão simples fazer um esquema gráfico que clarifique a situação, mas todos percebem que, por exemplo, duas vezes uma dívida de 3 € (representada pelo número –3) resulta numa dívida de 6 €, a qual é representada pelo número-6.

Situação 3

$$(-2) \times 3 = ? \qquad [\text{“menos duas vezes 3”}]$$

$$(-2) \times 3 = 3 \times (-2) = -6$$

Nesta situação, usa-se a propriedade comutativa para chegar à situação 2, onde o produto já é conhecido; no entanto, não se discute o conceito de multiplicação envolvido neste exemplo, ou seja, o que é multiplicar um n.º negativo de vezes determinada parcela? Será esta situação apenas abstracta ou é possível concretizá-la? O conceito de soma sucessiva da mesma parcela para definir a operação de multiplicação é suficiente ou nem sequer é posto em causa?

Situação 4

$$(-2) \times (-3) = ? \qquad [\text{“menos duas vezes –3”}]$$

Calculemos $[(-2) \times (-3)] + [(-2) \times 3]$

Usando a propriedade distributiva podemos pôr em evidência o factor (-2) que é comum:

$$\begin{aligned}[(-2) \times (-3)] + [(-2) \times 3] &= (-2) \times [(-3) + 3] \\ &= (-2) \times 0 = 0\end{aligned}$$

ou seja

$$[(-2) \times (-3)] + [(-2) \times 3] = 0$$

pelo que

$$[(-2) \times (-3)] \text{ e } [\underbrace{(-2) \times 3}_{-6 \text{ (pela situação 3)}}] \text{ são simétricos}$$

Logo,

$$[(-2) \times (-3)] = +6.$$

Nesta situação, chega-se à conclusão que o produto de dois números negativos é um número positivo, mas, novamente, o conceito usual de multiplicação não encontra lugar para se expandir, e torna-se confuso entender intuitivamente por que é que "menos vezes menos dá mais", acabando os alunos por ter que decorar uma regra, pois não são capazes de fazer uma representação mental imediata desta situação de modo a poderem socorrer-se da mesma sempre que estiverem a realizar cálculos com este tipo de operações.

Note-se que uma abordagem similar à que acabamos de apresentar é usada num manual de Matemática de grande distribuição nacional dos autores Iolanda C. Passos e Olga F. Correia (2003, p. 36).

Quanto às propostas para completar padrões encontramo-las em alguns manuais actuais do 7.º ano, como por exemplo, no dos autores Lima e outros (2002, p. 129) e no de Maria Augusta F. Neves e Maria Luísa M. Alves (2001). Vejamos o exemplo que estas duas últimas autoras nos propõem:

«(...) (+3)×(-3)= -9
(+2)×(-3)= -6
(+1)×(-3)= -3
0 ×(-3)= 0
(-1)×(-3)= (?) +3
(-2)×(-3)= (?) +6
(-3)×(-3)= (?) +9 (...)» (p.169)

Esta abordagem é também sugerida pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991) e, embora tenha a vantagem de permitir aos alunos prever as regras que se querem generalizar, apresenta lacunas por não estabelecer uma conexão em relação ao sentido operatório concreto (associado à ideia de adição sucessiva) que os alunos atribuem à multiplicação.

Crowley e Dunn (1985) também referem que esta abordagem usa apenas exemplos aritméticos e princípios matemáticos previsíveis. No entanto, o exemplo que deve ser dado "(...) requer que o aluno encontre um significado para o produto, que seja consistente com os conhecimentos aditivos já conhecidos" (p. 255). Estes autores sublinham aqui um aspecto que, desde cedo, nos preocupou, que foi o de estender o conceito de multiplicação, entendida como uma adição sucessiva, também aos números negativos. Por isso, nenhum dos métodos até aqui explanados nos satisfizeram pelas falhas que temos vindo a apontar.

Modelos intuitivos físicos

Vernon Sarver (1986), no seu artigo, começa por nos revelar a motivação deste tipo de abordagens. Segundo ele, todo o professor há-de encontrar pelo menos um aluno que vai querer saber o porquê de um número negativo vezes um número negativo produzir um número positivo:

> "(...) todo o professor de Álgebra vai, eventualmente, encontrar pelo menos um aluno que vai querer saber mais, isto é, um aluno que quer uma explicação intuitivamente satisfatória. Nessa altura, como deverá ele responder a esse estudante?" (p.178)

Para tentar responder a esta questão, Sarver (1986) propõe uma abordagem em que se tome como modelo uma sala de aulas, em que cada membro tem uma valoração (baseada, p.ex., na sua situação financeira). O autor dá o exemplo de uma sala com seis membros com as seguintes valorações: +2, -4, -4, -5, -5 e –5 (p. 178). Veja-se o esquema:

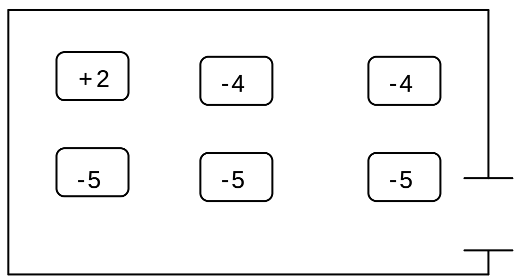


Fig. II.1 - 6 membros numa classe cuja valoração é – 21.

Agora, se considerarmos o movimento de saída dos três elementos cuja valoração é –5 (ou seja, a operação (–3)x(-5)), aconteceria o seguinte:

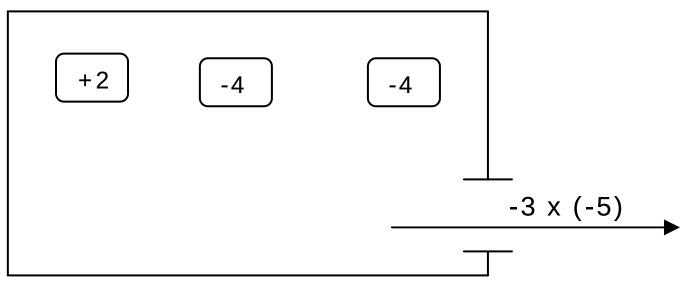


Fig. II.2 - Classe com a valoração –6, ou seja, subiu 15 valores.

Com esta situação, constatamos que o resultado da operação (-3)x(-5) é +15. De uma situação para outra, a situação financeira da classe subiu 15 valores ao saírem sucessivas valorações negativas. O autor, com este exemplo, consegue sugerir-nos uma situação que se pode concretizar, fisicamente, na sala de aula. Intuitivamente, passa a ser um modelo mais rico do que qualquer outro que não tenha este suporte concreto e real.

Com o mesmo carácter intuitivo, Marcia Cooke (1993) sugere-nos uma outra abordagem da multiplicação de números inteiros relativos, baseada em tempos, percursos em sentido positivo e negativo e distâncias. A autora começa por abordar os casos:

1) tempo positivo x percurso em sentido positivo;
2) tempo positivo x percurso em sentido negativo.

Depois destes casos, surgem os restantes:

3) tempo negativo x percurso em sentido positivo;
4) tempo negativo x percurso em sentido positivo.

Nas situações 3 e 4, depois de os alunos terem levantado o problema de "não haver tempos negativos", Marcia Cooke (1993) revela-nos que não teve uma resposta imediata para essa questão. No entanto, depois de discutir o assunto com colegas, chegaram à conclusão que podiam comparar o tempo negativo com a situação de "um filme que está a passar para trás (rewnding)". A autora desenvolveu, então, uma actividade com os alunos a percorrerem distâncias nos sentidos positivo e negativo e gravou esses percursos em vídeo. Depois, os alunos viram o filme passando a fita para a frente, quando estavam perante tempos positivos (casos 1 e 2) e passando a fita para trás, quando estavam perante tempos negativos (casos 3 e 4).

Por exemplo, para saber o produto resultante da operação (–2) x (–3), os alunos teriam que passar a fita para trás, de um aluno a percorrer duas vezes a distância (–3), ou seja, o aluno apareceria no filme a andar para trás – da posição (-6) para a posição (-3) e daqui para a posição 0 – donde concluíam que este percorreu uma distância positiva igual a +6.

Embora esta abordagem também seja intuitiva e baseada numa actividade que se pode concretizar e visualizar, pareceu-nos mais confusa do que a anterior, de V. Sarver (1986), pois exige que se trate o tempo de uma forma anti-natural. Os alunos ficam, assim, dependentes de imaginar o tempo a "andar" para trás, o que lhes poderá causar confusões quando não estão perante o vídeo, em que isso se pode ver mais claramente. De qualquer modo, esta proposta tem a vantagem de, pelo menos no momento, esclarecer os alunos mais cépticos, para que, mais tarde, como diz Marcia Cooke (1993), "quando eles encontrarem uma demonstração formal desta situação (...), a nossa actividade ajude a que os resultados pareçam inevitáveis e naturais para eles"(p.71).

Michael Dirks (1984) também nos propõe um modelo concreto para explicar a multiplicação de números inteiros relativos baseado na utilização de um material manipulativo – o "Ábaco dos Inteiros". Esta proposta tem a grande vantagem de utilizar materiais manipuláveis e concretos, sendo uma abordagem aparentemente adequada ao estádio de desenvolvimento médio de alunos do 7.º ano de escolaridade, e coerente com o sentido operatório concreto que os alunos atribuem à multiplicação.

A proposta sugerida por Dirks (1984) pareceu-nos, por isso, muito interessante e capaz de se apresentar como solução para algumas das dificuldades reveladas, tanto no ensino como na aprendizagem das operações com números inteiros relativos, em particular, da multiplicação. Como não encontrámos nenhum registo da sua aplicação e eficácia, elaborámos uma Proposta de ensino da multiplicação de números relativos, para o 7.º ano de escolaridade, baseada na utilização deste material manipulável – o Ábaco dos Inteiros.

O modo de funcionamento deste material e alguns exemplos operatórios que se poderão concretizar no mesmo serão explicados e apresentados no capítulo da Metodologia, que se segue, uma vez que a nossa proposta de ensino da multiplicação de números inteiros relativos se baseia neste material.

É de salientar que Dirks (1984) sugere-nos o uso do "Ábaco dos Inteiros" apenas numa fase inicial, defendendo que, depois de os alunos efectuarem variadas operações no ábaco e de escreverem as expressões correspondentes, "os alunos vão antecipar o resultado e o ábaco sairá desse trabalho" (p.54).

Liora Linchevsky e Julian Williams (1999) também se debruçaram sobre estes temas, realçando a importância do uso da intuição para preencher as falhas que os alunos sentem na extensão dos conceitos numéricos, aquando do "aparecimento" dos números negativos. Um dos modelos intuitivos que as autoras referem é também baseado na utilização do "Ábaco dos Inteiros", que estas designam, antes, por "ábaco duplo".

Linchevsky e Williams sublinham que:

> "o uso do ábaco duplo como um instrumento pedagógico e como um modelo é decisivo. Primeiro, porque o ábaco liga as tarefas da aula com a situação intuitiva (...), depois, o ábaco medeia a manipulação dos símbolos matemáticos (...), permitindo que as manipulações do ábaco sejam modeladas e transformadas em matemática." (1999, p.145)

Investigação específica relacionada com a multiplicação entre números negativos, em Portugal

Em Portugal, como nos confirma Ponte, Matos e Abrantes (1998), "não existem trabalhos que se tenham debruçado especificamente sobre o conceito de número relativo e as suas operações" (p. 141). Estes autores vão mais longe acrescentando que "trata-se de uma área na qual não existe sequer investigação básica" (p.141).

Existem apenas dois trabalhos que fazem ligeiras referências a estes conceitos. Um deles, realizado por Isabel Almeida, está incorporado num estudo de Maria Emília Catela e Wiggo Kilborn (1979, in Ponte, J. P., Matos, J., Abrantes, P., 1998, p. 141), que fazem a compilação dos erros de 24 alunos de uma turma do 8.º ano, na resolução de um teste, sendo que, entre os erros mais frequentes, estão as incorrecções na adição e subtracção em Z, essencialmente, devido à confusão com a *Regra dos Sinais* da Multiplicação.

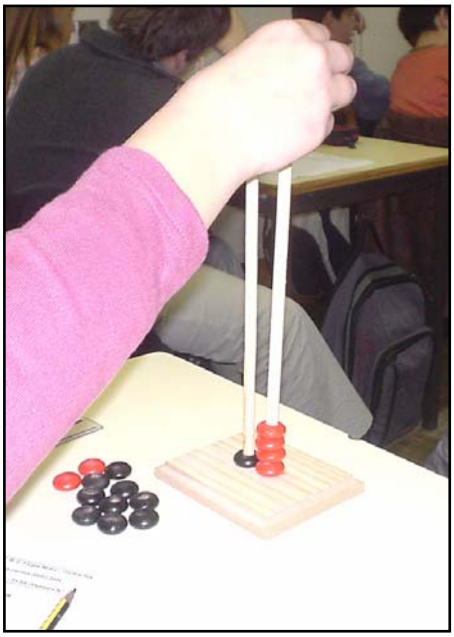
No outro trabalho, de Margarida César (1994, in Ponte, J. P., Matos, J., Abrantes, P., 1998, p. 141), a investigadora apresenta aos alunos participantes, de 7.º ano, diversas expressões numéricas para resolver, incluindo adições algébricas, multiplicações e divisões de números relativos, entre outras operações com fracções e potências. A autora refere que, contrariamente ao que aconteceu com as equações (tema sobre o qual também debruçou o seu estudo), não conseguiu estabelecer uma hierarquia de desempenho, devido à existência de “demasiados padrões de resolução” (César, M., 1994, p.264, citada em Ponte, J. P., Matos, J., Abrantes, P., 1998, p. 141,142), o que pressupõe uma complexidade de processos, que necessitará de ser aprofundada em novos trabalhos de investigação.

III – METODOLOGIA

III.1 - Opções metodológicas da investigação

Questão de investigação / Justificação do estudo

Foi objectivo desta investigação desenvolver uma Proposta de ensino, alternativa à tradicional[1], da Multiplicação de números inteiros relativos, utilizando materiais manipuláveis. O material escolhido foi o "Ábaco dos Inteiros", material que não tinha sido construído até ao momento, pelo menos em Portugal, embora já tivesse sido projectado por Dirks (1984), num artigo sobre Educação Matemática.



Figs. III.1 e III.2 – "Ábaco dos Inteiros"

[1] A proposta tradicional utiliza as propriedades Comutativa, Distributiva e a da Existência de elemento simétrico para demonstrar os vários casos da Regra de Sinais para a Multiplicação: +x+=+ (pela adição sucessiva de uma parcela positiva); +x-=- (pela adição sucessiva de uma parcela negativa; -x+=- (aplicando a Propriedade

comutativa, reduz-se ao caso anterior) e –x-=+ (recorre-se à Propriedade distributiva e à Existência de elemento simétrico para esta demonstração) (v. anexo ___)

A necessidade de uma proposta alternativa foi motivada pelas dificuldades e confusões reveladas pelos alunos quando o domínio da operação de multiplicação se alarga aos números negativos. É frequente, em fóruns da internet que se debruçam sobre questões matemáticas, este assunto ser muito discutido, quer por alunos, quer até por professores que não sabem como hão-de explicá-lo aos alunos do 7.º ano de modo a que eles o compreendam realmente. Vejamos algumas dessas preocupações, dúvidas e confusões:

“Como pode um negativo vezes um negativo dar positivo?” (Alejandre, S., sem data)

“Eu gostaria de saber mais sobre inteiros. A minha questão é, porquê que temos que retirar o sinal negativo quando multiplicamos dois números negativos?” (Blech, El-ad , 1998)

“Eu sei que quando multiplicamos dois números negativos obtemos um resultado positivo. Eu quero saber o porquê do resultado ser positivo.” (Sunny, 1997)

“Como podemos usar um modelo para demonstrar que um negativo vezes um negativo = um positivo? Eu tentei mostrar a adição repetida mas isso não funcionou. Por exemplo como representamos (-3) x (-5), num 7.º ano de escolaridade?” (Herman, D. , 2001)

“Será que me podiam providenciar um exemplo para compreender como é que um negativo vezes um negativo é positivo? – talvez na recta numérica. Eu gostava de compreender ao invés de simplesmente aceitar isso como um facto.” (Alaniz, J., 1998)

“Eu sou um estudante de um curso de Ensino que está a ter uma tarefa difícil, tentando explicar o porquê de um negativo vezes um negativo ser positivo. Será que me podem dar um exemplo? (Whittaker, 1997)

"Eu estou a tentar encontrar um sentido para as regras (da multiplicação) para que elas sejam mais fáceis de memorizar:

Pos x Pos = Pos, faz sentido. Faço-o desde a 3ª classe. E até posso pensar numa situação. (...)

Pos x Neg = Neg, eu também consigo pensar numa situação para este caso. Se eu tiver 4 dívidas de 20€ cada, no final, eu devo dinheiro.

Mas, Neg x Neg =Pos simplesmente não faz sentido. Isto alguma vez acontece na vida real?

O meu professor disse-me que podíamos entender este caso como o oposto de Pos x Neg, mas isso parece "treta". Não é realístico." (Sally, 1994)

Em quase todas as dúvidas expostas há uma tentativa de busca de um sentido concreto para a multiplicação de números negativos, principalmente, porque esta matéria se lecciona no 7.º ano, altura em que os alunos ainda têm um pensamento muito concreto. No entanto, ainda que assim não fosse, a questão colocar-se-ía igualmente, pois, até aos números negativos, a multiplicação tinha um sentido concreto (através da adição sucessiva), do qual o sujeito dificilmente se desvincula, necessitando, agora, de uma nova extensão da operação de multiplicação, que interiorizou como sendo uma adição sucessiva.

Assim, com esta investigação, propomo-nos implementar uma Proposta de Ensino da Multiplicação de Números Inteiros Relativos, no 7.º ano, para responder à seguinte questão:

Será efectiva uma proposta de ensino, para a Multiplicação de números inteiros relativos, no 7.º ano, usando o "Ábaco dos Inteiros" ?

Convém referir que, dentro desta questão global, nos importa esclarecer em que medida a implementação desta proposta:

1- facilita a aprendizagem dos alunos sobre esta matéria;
2- facilita o ensino desta matéria, ao professor.

Investigação Qualitativa

Optámos por uma investigação qualitativa porque, sendo o objecto de estudo uma problemática que envolve o ensino e aprendizagem, interessou-nos ir além da quantificação e categorização das dificuldades. Abordámos, antes, este problema, assumindo a existência de dificuldades, com especial incidência para as reveladas na multiplicação de números negativos, independentemente da sua dimensão. A abordagem qualitativa que concebemos teve como quadro de referência:

- a base conceptual matemática que envolve a problemática em estudo;
- as dificuldades vividas pela professora Alexandra M. no ensino desta matéria;
- as dificuldades de aprendizagem dos alunos, reconhecidas pela professora Alexandra M., nesta matéria;
- os métodos anteriormente utilizados pela professora Alexandra M. no ensino da multiplicação de números negativos, acompanhados das suas perspectivas matemática e pedagógica.

Foi com este quadro de referência que partimos, então, para uma nova proposta de ensino, na tentativa de avaliar se as dificuldades, tanto ao nível do ensino como ao nível da aprendizagem, eram diminuídas ou até suprimidas. É de salientar que a proposta de ensino que realizámos utilizou um material manipulável - "Ábaco dos Inteiros"- construído propositadamente para esta experiência, de muito fácil manuseamento, e, portanto, apropriado para alunos de 7.º ano. Além disso, as representações matemáticas em que o material assenta e a forma como nele se opera respeitam a natureza quer dos conceitos quer das operações matemáticas envolvidas. Aliás, esta foi uma característica que tomámos como essencial na escolha da proposta a desenvolver e do material a ser usado. Tentámos, assim, não sobrepor a forma pedagógica ao conteúdo matemático, mas antes, inspirar a forma nesse mesmo conteúdo respeitando, deste modo, critérios de rigor no ensino das operações e conceitos matemáticos em causa.

Importa ainda referir que a metodologia de trabalho que desenvolvemos teve como espinha dorsal a questão de investigação à qual nos propusemos responder. Contudo, o nosso propósito, mais do que o de quantificar resultados e concluir verdades absolutas, foi o de abrir novas perspectivas para o ensino a aprendizagem da multiplicação de números negativos.

Estudo de caso para ensino

No âmbito da investigação qualitativa que nos propusemos realizar, optámos pelo estudo de caso, por este ter, segundo Merriam (1994, p.23), quatro características que o justificam. Segundo esta autora, há, então, quatro características fundamentais dos estudos de caso em educação: são particularizantes, descritivos, heurísticos e indutivos. Assim, também o nosso estudo foi:

1 – Particularizante, dado que se centra numa situação particular – a Proposta de Ensino da Multiplicação de Números Inteiros Relativos com o "Ábaco dos Inteiros"-, a ser experimentada numa turma específica do 7.º ano;

2 – Descritivo, dado que o produto final deste estudo de caso será uma descrição analítica da experiência, a qual sustentará as interpretações e conclusões da investigação;

3 – Heurístico, na medida em que contribuirá para uma reflexão alargada das questões de investigação a todos quantos estas interessarem;

4 – Indutivo, dado que tem como suporte o pensamento indutivo, isto é, as interpretações emergem da análise dos dados e estes do contexto do estudo de caso.

É ainda importante salientar, novamente, que a nossa intenção não é a generalização de uma ou outra conclusão a que chegarmos, mas, sobretudo, estudar uma proposta de ensino específica, nomeadamente, estudar os pormenores que dizem respeito à questão de investigação que formulámos. Com isto, desejamos, sobretudo, abrir novas perspectivas no ensino e aprendizagem desta matéria.

Os Participantes

Nesta investigação, optámos por dois participantes: a professora (que representa a perspectiva de quem ensina) e os alunos (que representam a perspectiva de quem aprende).

A professora

Para a escolha da professora, importaram três factores essenciais:

- predisposição, abertura e envolvimento na experiência a realizar;
- era importante que a professora tivesse alguma experiência de ensino, para tomarmos conhecimento das suas perspectivas teóricas e práticas sobre a matéria em questão, e para as podermos confrontar com a nova proposta de ensino;
- ser professora de uma turma de 7.º ano de escolaridade.

A professora com quem tivemos o prazer de trabalhar, por preencher este perfil, foi Alexandra Martinho. Licenciou-se em Matemática (Via Ensino) pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e tem uma experiência profissional de 16 anos (contabilizados até 2003), nos Ensinos Recorrente, Básico e Secundário. Actualmente, é professora numa Escola Básica E.B.2,3 do distrito de Braga, e, no ano lectivo 2003/2004, teve uma única turma de 7.º ano, com a qual desenvolvemos esta Proposta de Ensino.

A turma / alunos

A escolha da turma não obedeceu a critérios de representatividade relevantes, de nenhuma população determinada, pois não se pretendia fazer nenhuma generalização estatística do caso. O único critério a garantir era que fosse uma turma do 7.º ano, o que aconteceu, pois é neste nível de escolaridade que se lecciona a multiplicação de números negativos, pela primeira vez.

Assim, a turma de 7.º ano que colaborou com esta investigação foi o 7.º A (de 2003/2004), composta por 27 alunos, na faixa etária dos 12/13 anos.

A recolha de informação

A recolha de informação foi realizada em duas frentes que se complementam. São elas:

1 – Informação obtida da professora: através de conversas informais e entrevistas realizadas à professora da turma em estudo.

A entrevista foi gravada na íntegra pela investigadora que, nesta fase, assumiu um papel de inquiridor-ouvinte, estabelecendo uma interacção directa com um dos participantes deste estudo – a professora Alexandra Martinho. É de referir que foi elaborado um guião para cada entrevista (Anexos 4 e 5) tendo em conta os objectivos definidos para a mesma. Dada a importância de todo o conteúdo das entrevistas, estas foram gravadas em áudio e, posteriormente, transcritas na íntegra;

2 – Informação obtida dos alunos: através da observação decorrente da aplicação prática da proposta de ensino, numa turma de 7.º ano, a qual decorreu durante duas aulas. Cada aula teve a duração de 90 minutos e, para cada uma delas, foi preparada uma Ficha de Apoio (Anexo 1) que, juntamente com o "Ábaco dos Inteiros", serviram de suporte às actividades da aula. Além disso, os alunos também responderam, por escrito, a uma questão relacionada com o que se pretendia avaliar, o que, juntamente com a observação efectuada nas aulas, serviu de suporte à análise do trabalho desses alunos.

Durante as aulas, a investigadora assumiu o papel de observadora, na recolha de dados. Para o efeito, utilizou grelhas de observação (Anexo 3) onde fez os registos da experiência segundo um quadro de referências que se pretendia observar.

Uma das grandes vantagens da observação é o facto de permitir registar comportamentos e situações à medida que estes vão tendo lugar, mesmo que, muitas vezes, extrapolem o quadro de referências construído inicialmente. Assim sendo, além dos apontamentos que se enquadravam na grelha inicialmente construída, outros foram sendo registados nessas aulas, pela investigadora, que se assumiu sempre como mera espectadora das aulas em que decorreu a experiência. Aliás, este distanciamento do objecto em análise foi uma preocupação constante e, até na sala de aula, a investigadora tentou que a sua presença fosse o mais discreta possível, optando por um lugar sentado, na última fila da sala. Mas, sobre a observação, acrescentaremos algumas notas mais adiante.

Concluindo, a recolha de informação foi feita num contexto múltiplo e, a nosso ver, apropriado ao estudo de caso em questão, já que a investigadora contemplou um cruzamento de papéis : pesquisadora, observadora, inquiridora e ouvinte. Merriam (1994) também refere este cenário como o mais provável em investigação no terreno, já que combina os diálogos e conversas informais com as situações a observar.

III.2 - As opções de trabalho

A problemática da multiplicação de números negativos

A questão da multiplicação de números negativos sempre foi intrigante. Isto porque há uma ruptura de significado ou de sentido que se dá à própria operação de multiplicação quando nos deparamos com multiplicadores negativos. Para muitos indivíduos, fora de um domínio exclusivamente abstracto, não faz qualquer sentido multiplicar algo (seja o multiplicando um objecto positivo ou negativo) um número negativo de vezes e, mais "estranho" ainda é o facto de a multiplicação de um objecto negativo, um número negativo de vezes, produzir um resultado positivo, ou seja, "menos vezes menos dar mais".

Tentemos analisar a "estranheza" (para quem a sente) de "menos vezes menos dar mais"...

A primeira pergunta é: Mas porquê?

É evidente que a Matemática tem um domínio abstracto demasiado vasto, que não contempla, nem tem que contemplar, explicações concretas e reais para o que, por natureza, não o é. Mas a operação "Multiplicação" é, por definição, uma operação real que se aprende e ensina podendo concretizá-la. Isto é, sendo a multiplicação compreendida, de um modo geral, por uma adição repetida, ela não pode deixar de o ser, a dada altura, muito menos para alunos de 7.º ano, que ainda pensam as operações de modo concreto.

Não devemos perder-nos na questão filosófica de discutir se essa operação é, afinal, abstracta com algumas aplicações práticas, ou se é prática com a possível extensão abstracta. Isso obrigar-nos-ia a discutir a pertinência desta matéria se leccionar no 7.º ano de escolaridade. Não sendo nosso objectivo colocar isso em causa, pelo menos por enquanto, preferimos pensar na questão da sobrevivência do conceito desta operação nesta altura, ou seja, pensar e reflectir acerca de como ensinar uma operação que já é conhecida, que já foi apreendida, mas agora com números negativos, sem alterar o conceito da operação que é tão simples como ser uma "adição sucessiva".

A questão começa a ficar mais clara se conseguirmos responder, então, à pergunta:

Onde está a adição sucessiva na multiplicação de dois números negativos?

Comecemos por fazer uma retrospectiva das multiplicações que não causam incómodo e perceber por que o não causam.

1) Por que é que "mais vezes mais dá mais"?

Esta pergunta não incomoda ninguém, muito menos um professor de matemática que, certamente, dará um exemplo como este para o justificar:

<u>Exemplo</u>: 2 x 3

Se lermos "duas vezes, 3" poderemos fazer o seguinte esquema:

3 + 3 = 6

Multiplicador = 2
Multiplicando =3

Se lermos "2, vezes três" fazemos antes o esquema:

2 + 2 + 2 = 6

Multiplicador = 3
Multiplicando =2

Como podemos reparar, à parte do problema da linguagem que, como vemos, poderá levar a que a operação seja interpretada de duas formas diferentes não é nada complicado esclarecer um aluno acerca deste "porquê".

2) Por que é que “mais vezes menos dá menos”?

Começou o problema, ainda que, por agora, alheio à operação de multiplicação: aparece agora o número negativo que, para os alunos de 7.º ano, não é assustador porque é aceitável, na medida em que podem associar o número negativo a “objectos” reais ainda que não concretos ou manipuláveis, como seja associar o número –2 a uma dívida de 2 euros, por exemplo, ou a uma temperatura negativa de –2 graus. Nesta altura, os alunos de 7.º ano conseguem ter representações mentais na ausência do objecto ou representações mentais de objectos que representem realidades não manipuláveis, como seja o caso da dívida ou de uma temperatura negativa.

Num domínio exclusivamente matemático, (–1) é o simétrico de 1, ou seja, o número que, adicionado a 1 dá zero. Esta é a definição matemática de (-1). Assim teremos também que o simétrico de (-1) é 1. Então, por definição,

– (1) = –1 (o simétrico de 1 é (–1))

– (–1) = 1 (o simétrico de (–1) é 1)

Depois de definir o número negativo, importa então voltar à questão do “por que é que mais vezes menos dá mais?”. Representemos, agora, com côr vermelha, o objecto negativo. Vejamos então:

<u>Exemplo</u>: 2 x (-3)

Se lermos “duas vezes, -3” poderemos fazer o seguinte esquema:

(-3) + (-3) = (-6) Perfeito, não há problema!

E se lermos “2, menos três vezes”? É aqui que subvertemos o sentido da multiplicação, até aqui entendido como uma adição sucessiva, uma vez que tentamos convertê-la agora numa subtracção sucessiva. Fazê-mo-lo através de uma mudança de linguagem que nos parece aceitável quando o multiplicando é um objecto positivo e, por isso, possível de se imaginar sendo retirado vezes sem conta, ainda que provocando uma situação de déficit, ou seja, um produto negativo, pelo que, caímos no esquema da situação seguinte:

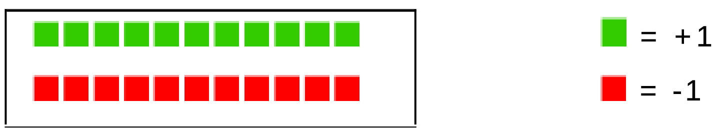
3) Por que é que “menos vezes mais dá menos”?

Embora, como já dissemos, esta situação seja aceitável de se imaginar pois é relativamente simples pensar numa determinada quantidade positiva sendo retirada sucessivamente, ainda que isso provoque um déficit (podemos facilmente pensar numa conta bancária com saldo nulo, e daí retirar sucessivamente uma quantia produzindo, obviamente, um saldo negativo). No entanto, esta situação já não é tão simples de esquematizar, pois exige a representação de algo que não é concreto nem manipulável – exige e representação do zero e, dele, retirar sucessivamente uma quantidade positiva, sendo o resultado dessa operação uma quantidade negativa... No mínimo, conflituoso, no máximo, absurdo!...

Comecemos, então, por representar o zero, não como algo que não se vê porque nada tem, mas como um objecto que resulta da soma de dois números simétricos, ou seja, 0=+6+(-6) , ou 0=-2+(+2) , ou 0=+10+(-10) , ...

Assim, adoptemos, por exemplo, a seguinte representação do zero:

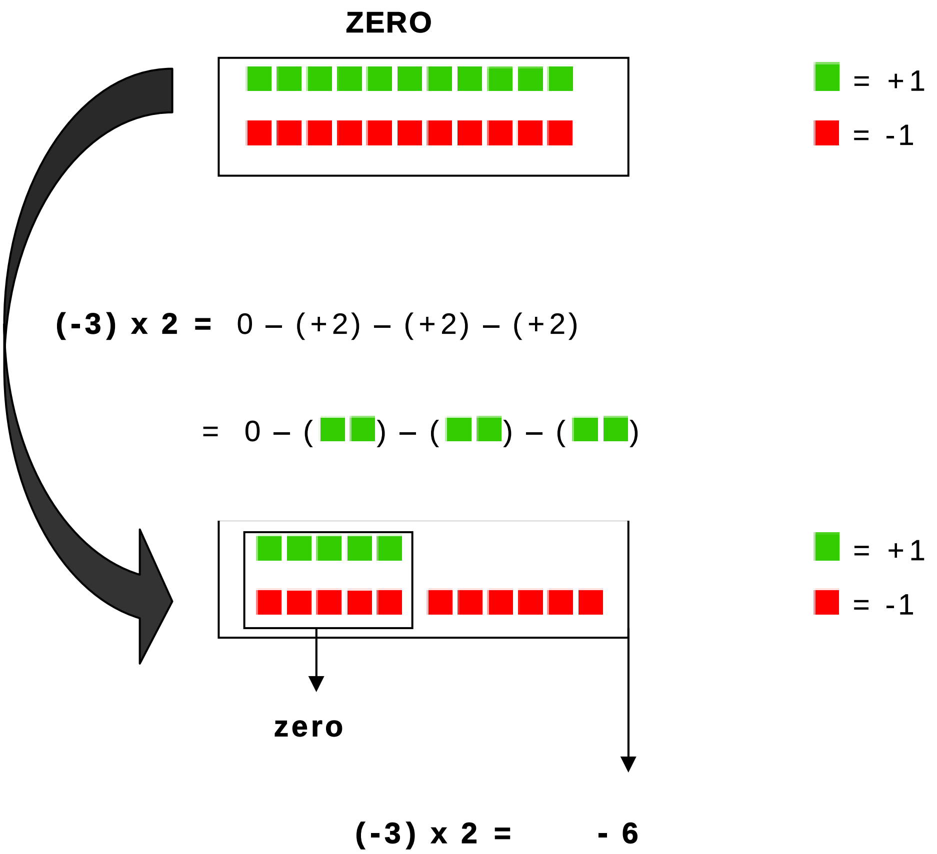
ZERO:



Analisemos agora o exemplo em causa com base nesta representação do zero:

<u>Exemplo</u>: (-3) x 2

Se lermos “menos três vezes, 2” [ou, como há pouco, “2, menos três vezes) isso equivalerá a retirar três vezes o número +2 ( ), sempre a partir de zero, ou seja:



Este esquema pode ou não ser eficaz ou funcional para explicar o porquê de "menos vezes mais dar menos", mas é um esquema com sentido, acessível ao pensamento de um aluno do 7.º ano de escolaridade e que não cria qualquer ruptura com o sentido que atribui à multiplicação. O conceito de multiplicação passa apenas a ser extensível a casos em que o multiplicador é negativo e, como tal, nestes casos, deve ser entendida como uma subtracção sucessiva a partir de zero, ou, por outras palavras, a multiplicação passa a ser entendida como uma <u>adição algébrica sucessiva</u>.

Finalmente...

4) Por que é que "menos vezes menos dá mais"?

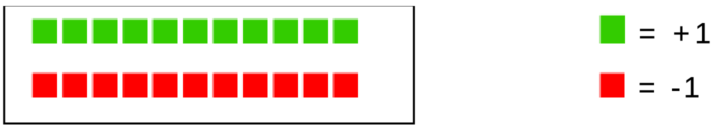
A explicitação do caso anterior (caso 3) que, regra geral, costuma não ser tratado, pois a comutatividade da multiplicação permite transportá-lo imediatamente para o caso 2 - evitando-se "o problema" do multiplicador negativo – vem facilitar o entendimento deste último exemplo, já que o problema da representação do zero (que é sempre a situação inicial) e dos multiplicadores negativos já foram tratados.

Vejamos, então, o que será pensar na situação seguinte:

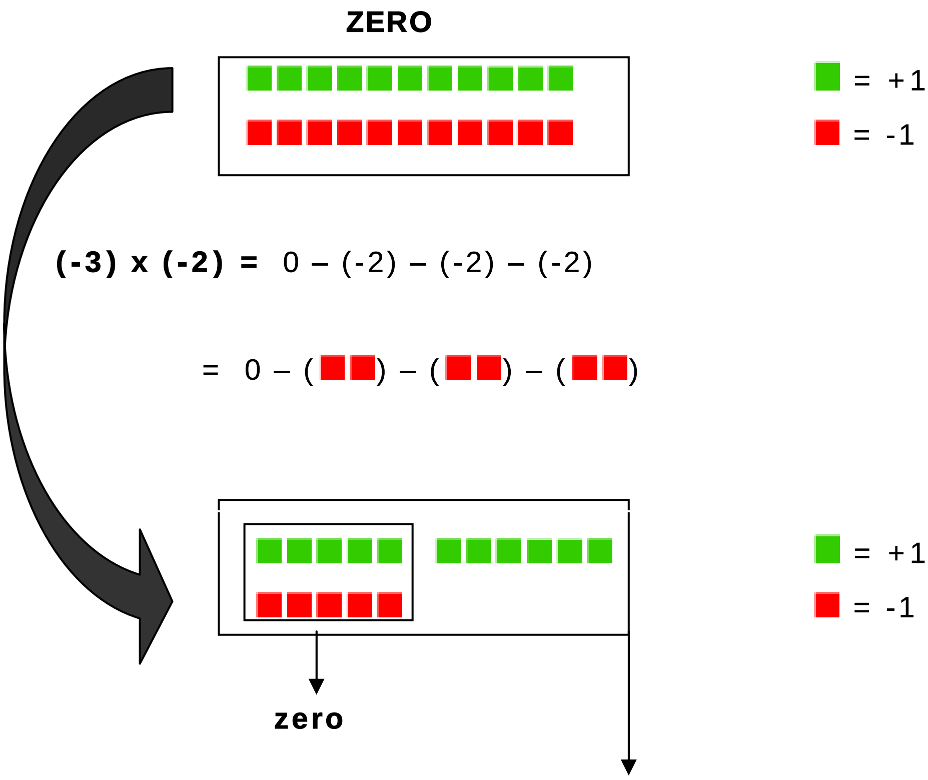
<u>Exemplo</u>: (-3) x (-2)

Se lermos "menos três vezes, -2", isso equivale a retirarmos três vezes o número -2, partindo de uma situação equivalente a zero, pois nada temos à partida. Assim, adoptemos novamente a seguinte representação de zero (situação inicial):

ZERO:



Agora, procedendo à operação antes indicada teremos, esquematicamente, o seguinte:



(-3) x (-2) = + 6

Fica agora muito mais claro compreender, à luz do conceito de multiplicação, por que é que “menos vezes menos dá mais” : tão somente porque quando retiramos sucessivamente uma quantidade negativa, de zero, ficamos sempre com um excesso de uma quantidade positiva.

Com esta sequência de explicações do sinal de cada produto, não só mantemos a mesma abordagem operatória, não criando qualquer ruptura com a mesma, como também não necessitamos de introduzir um grau de abstracção algébrica e aritmética para o qual a maioria dos alunos do 7.º ano não está, cognitiva e psicologicamente, preparada. Por isso, se esta abordagem não for feita, optando-se pela tradicional demonstração que usa as propriedades comutativa, distributiva e de existência de elemento simétrico, para chegar aos mesmos resultados, corre-se o risco de os alunos decorarem a tão útil *Regra dos Sinais*, sem lhe conferir qualquer sentido e, pior, não estenderem o conceito de multiplicação ao caso em que o multiplicador é um número negativo.

O material – “Ábaco do Inteiros”

Tudo o que acabámos de referir (sentido operatório concreto da multiplicação, multiplicador negativo, representação do zero) foi tido em conta na opção que fizemos pelo material a utilizar nesta proposta de ensino – o “Ábaco dos Inteiros”. Com este material, a forma de representação do zero e os esquemas operatórios são possíveis de se concretizar, o que permitiu aos alunos de 7.º ano com quem trabalhámos, uma abordagem operatória concreta da multiplicação de números relativos (como também da adição e subtracção dos mesmos), acompanhando-a sempre com um material manipulável.

Neste nível de ensino, é bom que tenhamos consciência das características dos alunos. A evolução destes alunos a vários níveis é acompanhada pela sua capacidade de pensar cada vez mais abstracta. No entanto, segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991), “ainda neste período, deverão ser as experiências concretas a proporcionar a construção do seu conhecimento” (p.81).

Vejamos, então, como funciona o “Ábaco dos Inteiros”, para que não restem dúvidas da sua adequação aos alunos do 7.º ano de escolaridade.

Convém começarmos pela descrição da estrutura do material: este ábaco tem duas colunas, uma onde se colocam as unidades positivas (representadas, cada uma, por uma argola vermelha) e outra onde se colocam as unidades negativas (representadas, cada uma, por uma argola preta). O número negativo (-1) é o simétrico do positivo (+1), ou seja, (+1) + (-1) = 0. Esta definição matemática de números simétricos é respeitada também no ábaco, de tal forma que, quando temos uma argola positiva a par de uma negativa, essa situação equivale a ter zero, o que acontecerá com todos os números positivos e negativos que forem simétricos. Daqui resulta que teremos várias representações possíveis do zero. Seguem-se alguns esquemas a título de exemplo:

- Algumas representações do zero

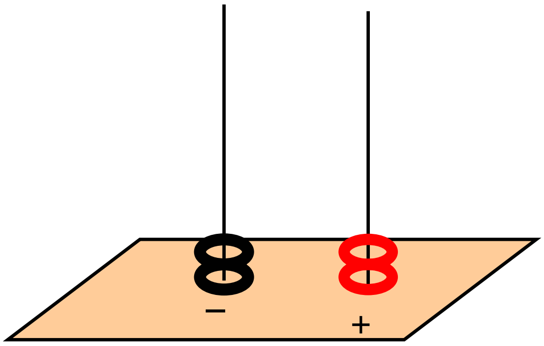


Fig.III.3 – Representação do zero

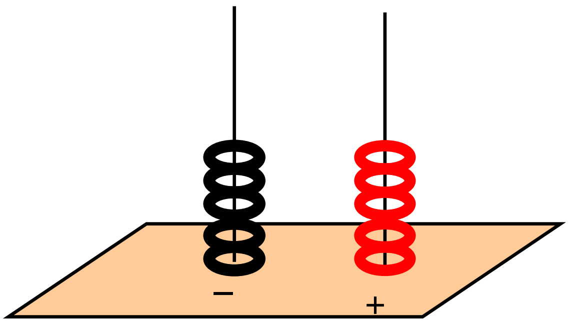


Fig.III.4 – Representação do zero

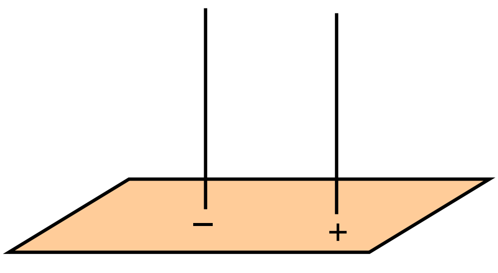


Fig.III.5 – Representação do zero

Todas as restantes representações de números inteiros, sejam positivos ou negativos, partem deste esquema, pois é sempre a partir de um nível onde estará representado o zero que faremos a leitura ou representação desses números. Vejamos:

- Algumas representações do número (+3)

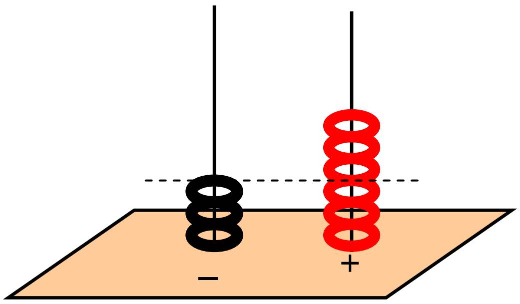


Fig. III.6 – Representação do (+3)

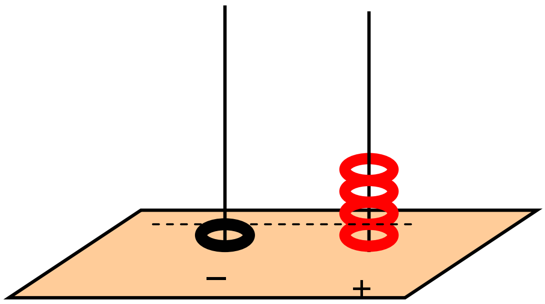


Fig.III.7 – Representação do (+3)

- Algumas representações do número (-4)

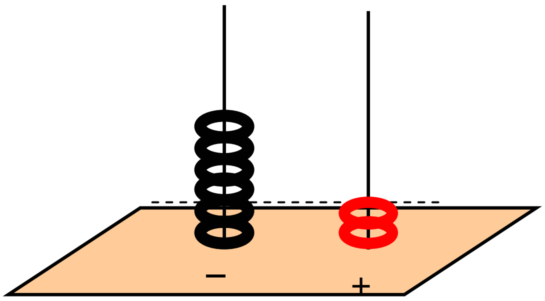


Fig. III.8 – Representação do (-4)

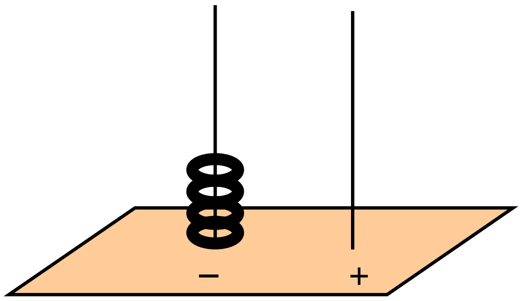


Fig. III.9 – Representação do (-4)

Vejamos agora a concretização de algumas operações, no ábaco.

ADIÇÃO – Exemplo: (+2) + (-5) = ?

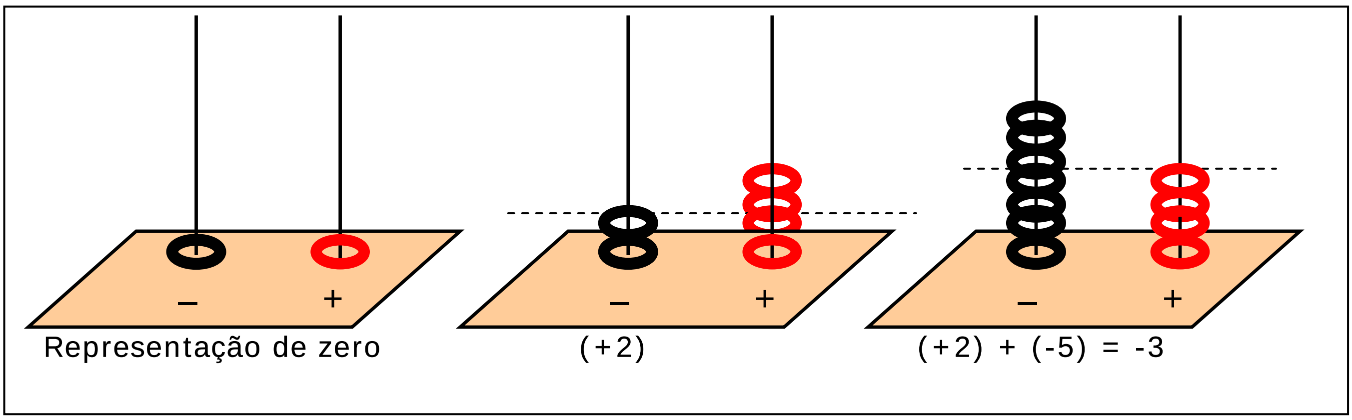


Fig. III.10 – Possível esquema da operação (+2) + (-5) = -3

SUBTRACÇÃO – Exemplo: (+2) - (-5) = ?

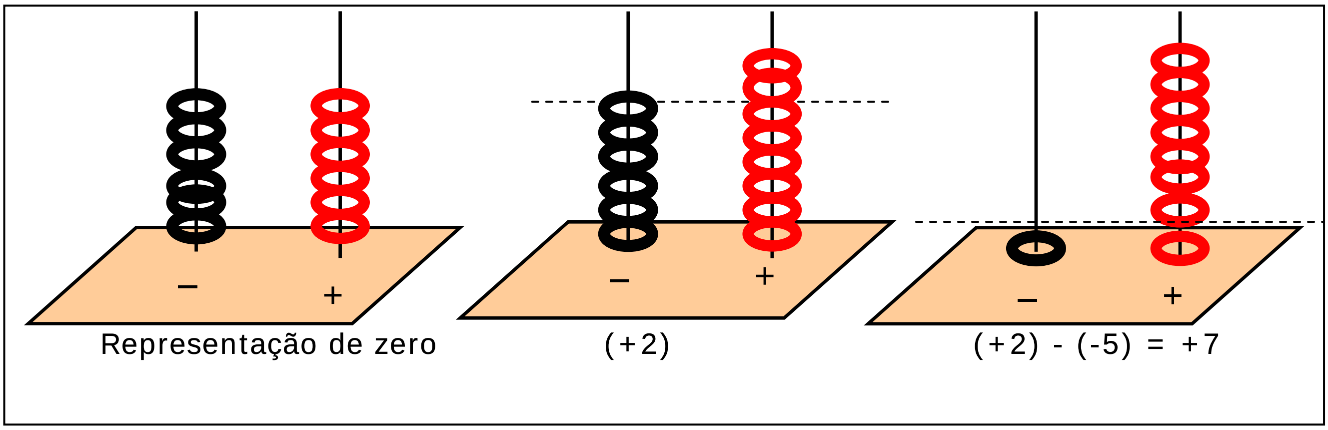


Fig. III.11 – Possível esquema da operação (+2) - (-5) = +7

MULTIPLICAÇÃO

– Exemplo 1: (+2) x (+3) = ?

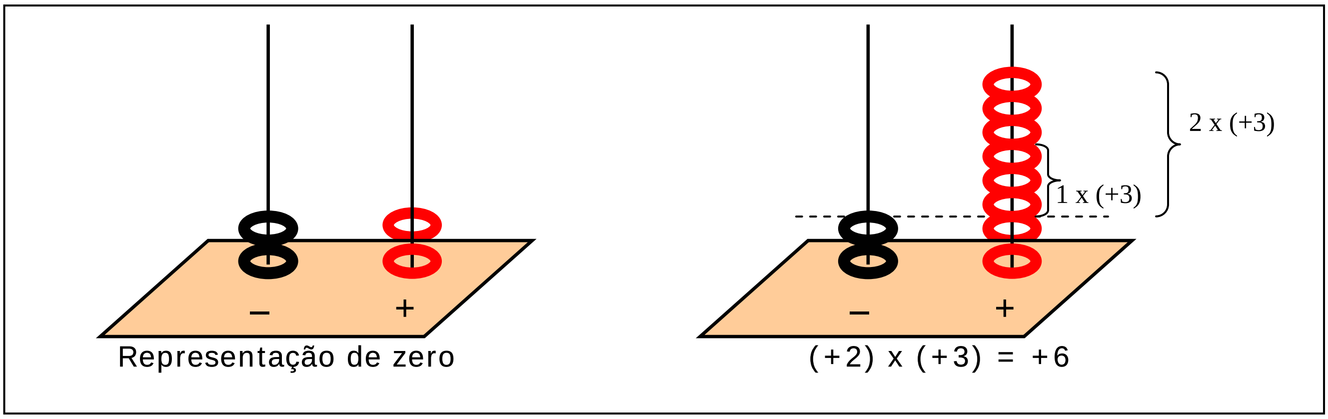


Fig. III.12 – Possível esquema da operação (+2) x (+3) = +6

– Exemplo 2: (+2) x (-3) = ?

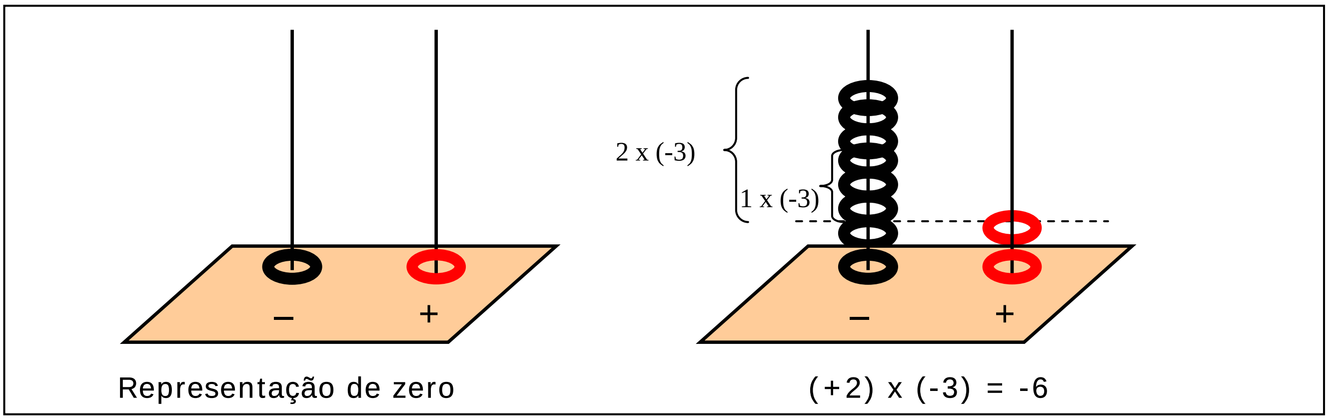


Fig. III.13 – Possível esquema da operação (+2) x (-3) = -6

– Exemplo 3: (-2) x (+3) = ?

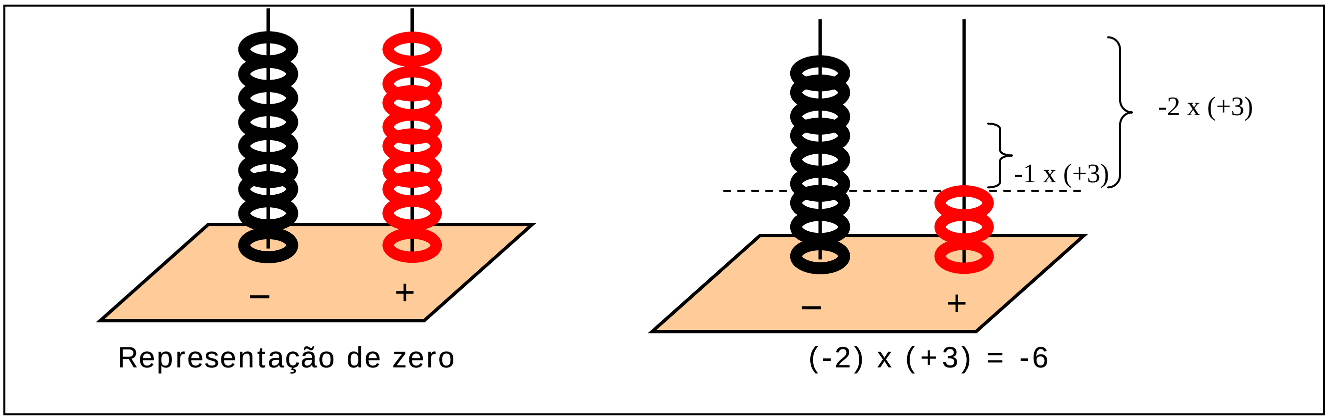


Fig. III.14 – Possível esquema da operação (-2) x (+3) = -6

– Exemplo 4: (-2) x (-3) = ?

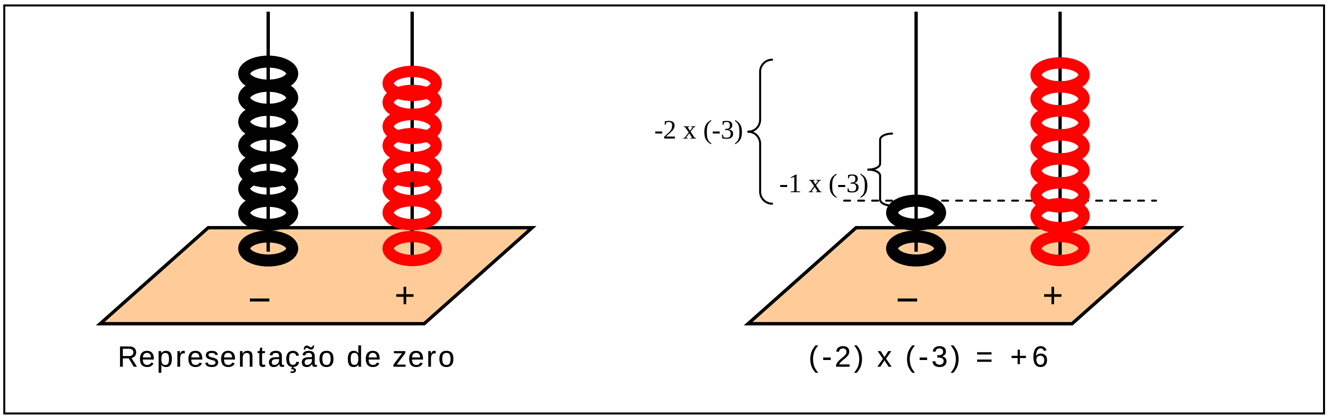


Fig. III.15 – Possível esquema da operação (-2) x (-3) = +6 !

Como se pode constatar, estes esquemas obedecem aos conceitos e operações matemáticas que lhes estão subjacentes, envolvendo visual e manualmente conceitos tão importantes como o de número, incluindo o de número negativo e zero, permitindo, assim, que o aluno tenha um poder mais alargado sobre as operações, uma vez que as consegue concretizar, manipular, compreender, dar sentido, ...

Em relação ao professor, este conseguirá esclarecer muito mais rapidamente qualquer dúvida que possa surgir, e, acima de tudo, terá ao seu dispor um método acessível ao pensamento da maioria dos alunos, ao contrário do método tradicional, que se revela muito deficiente a esse nível.

Além destas vantagens, o Ábaco dos Inteiros vem integrar-se numa família de materiais com um longo percurso histórico – a família dos Ábacos

Este percurso histórico, que se estende à China e ao Japão, onde ainda hoje o ábaco se utiliza em alguns estabelecimentos comerciais, como instrumento de cálculo, pode também ser explorado nas aulas como um ponto de interesse e motivação para os alunos. De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics* (1991):

"Através da história da matemática, problemas práticos e investigações teóricas estimularam-se mutuamente de tal modo que é impossível desligá-las" (p. 6).

De facto, convém referir que o primeiro objectivo definido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991) para todos os alunos é que estes aprendam a dar valor à matemática, sugerindo que as experiências relacionadas com a evolução histórica, cultural e científica da matemática podem ajudar fortemente a que os alunos apreciem o papel que a matemática sempre desempenhou e a forma como tem vindo a contribuir para o desenvolvimento da nossa sociedade.

III.3 - A experiência / trabalho realizado

O contacto com a professora Alexandra Martinho

Começámos por efectuar um primeiro contacto com a professora Alexandra M., que se mostrou, desde logo, disponível. Aliás, a professora já tinha tido algum conhecimento desta proposta pelos jornais locais, já que o projecto da experiência tinha acabado de ser premiado com o Prémio D. Dinis 2002, atribuído pelo Montepio Geral em nome da Fundação Agostinho da Silva. Assim sendo, foi muito fácil envolver a professora nesta proposta, a qual se mostrou sempre muito interessada em colaborar. A única preocupação que demonstrou foi apenas a de perceber o funcionamento do "Ábaco dos Inteiros". Explicamos-lhe então como funcionava este ábaco, exemplificando várias situações de representação de números positivos e negativos e, de seguida, demonstramos-lhe como se efectuavam operações neste material. Ela achou muito acessível e ficou, desde logo, entusiasmada e expectante relativamente à experiência que iríamos realizar na sua turma.

Nesta primeira conversa informal, tivemos também oportunidade de perceber algumas das suas perspectivas e métodos de ensino. Entre eles, é de salientar o seguinte:

- a professora costumava leccionar a multiplicação de números negativos, usando a tradicional demonstração que aparece em alguns livros 7.º ano e que envolve a propriedade distributiva. Vejamos o exemplo:

$$\left[(-2)\times(-3)\right] + \left[(-2)\times 3\right] = (-2)\times\left[(-3)+(+3)\right] = (-2)\times 0 = 0$$

ou seja,

$$\left[(-2)\times(-3)\right] + \left[(-2)\times 3\right] = 0$$

pelo que

$\left[(-2)\times(-3)\right]$ e $\underbrace{\left[(-2)\times 3\right]}_{-6}$ são simétricos, ou seja, $\left[(-2)\times(-3)\right] = +6$

- a professora admitiu que esta não era uma explicação que lhe agradasse em absoluto porque sentia dificuldades dos alunos na compreensão da explicação, embora a confortasse o facto de dispor de uma explicação matematicamente lógica e rigorosa, o que a fazia sentir mais segura. Admitiu também que o grau de abstracção desta explicação faz com que muitos alunos acabem por decorar a famosa “Regra dos Sinais” sem, verdadeiramente, a compreender ao nível do conceito da multiplicação, nomeadamente, no que respeita aos números negativos;

- além disso, revelou-nos ainda que verificava que os alunos, depois de aprenderem a “Regra dos Sinais” para a Multiplicação, muitas vezes a aplicavam na Adição Algébrica de números relativos e, mais tarde, na Adição Algébrica de monómios. Os alunos cometiam erros do tipo $(-2)+(-3) = +5$!, porque menos com menos dá mais! Isto revela que os alunos efectuam operações ultrapassando o seu conceito e o seu entendimento;

Apesar de algum sentimento de insegurança revelado inicialmente, foi extraordinária a abertura e disponibilidade da professora para esta nova experiência. Além disso, revelou uma atitude de grande profissionalismo pelo interesse na procura de possíveis melhorias no seu desempenho, nos seus métodos de ensino, na forma como os seus alunos podiam aprender, e no sentido de responsabilidade com que colaborou e se prontificou, desde início, para esta experiência.

Durante esta primeira conversa informal, combinámos com a professora realizar a experiência em duas aulas:

<u>1.ª aula</u> – onde iríamos apresentar o “Ábaco dos Inteiros” para que os alunos se familiarizassem com o material, o manuseassem livremente, começando por representar no ábaco o número zero e números positivos e negativos, de diversas formas. Optámos por fazer essa apresentação na aula em que a professora iria leccionar a Adição de números inteiros relativos, pois, assim, os alunos já podiam operar no ábaco, o que enriqueceria, desde logo, a aula e o sentido que dariam ao material. Combinámos que seria distribuído um Ábaco por cada aluno.

2.ª aula – onde iríamos abordar a questão de investigação propriamente dita – a multiplicação de números inteiros negativos. Seria uma aula em que seriam apresentados todos os casos da multiplicação de números inteiros relativos: “+ com +”, “+ com –“, “- com +” e, finalmente, “- com –“.

A construção dos “Ábacos dos Inteiros”

O esboço do material foi retirado de um artigo de M. Dirks(1984), intitulado “The integer Abacus”, mas não existia nenhum exemplar construído desta sugestão. Por isso, mandámos construir 30 ábacos: as bases em madeira foram feitas na Carpintaria da Cercigui, em Guimarães; as “bolinhas” em madeira que irão representar as unidades positivas e negativas foram feitas por um torneiro, de Paços de Ferreira e, para terminar, foram pintadas de preto e vermelho num mecânico de automóveis, em Lisboa. Apesar do trabalho, o resultado foi exactamente o que tínhamos projectado. Veja-se um desses exemplares na figura seguinte:

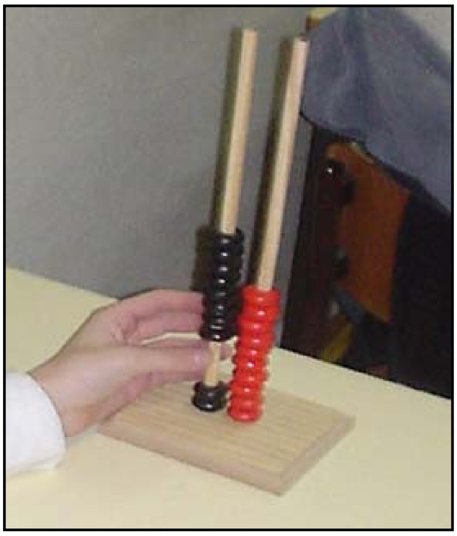


Fig.III.16 – “Ábaco dos Inteiros”

As aulas

Fichas de Apoio

Para as aulas preparámos, juntamente com a professora A.M., duas fichas de apoio:

Ficha 1 (para a 1ª aula – 11 de Fevereiro de 2004) (Anexo 1)

Conteúdos: Adição de números inteiros relativos
Propriedades da Adição
Adição sucessiva de números inteiros relativos

Objectivos: Apresentação do "Ábaco dos Inteiros" numa aula em este já pudesse ser utilizado nas operações básicas como na Adição e, eventualmente, na Subtracção.

Ficha 2 (para a 2ª aula – 8 de Março de 2004) (Anexo 2)

Conteúdos: Multiplicação de números inteiros relativos
Propriedades da Multiplicação

Objectivos: Utilização do "Ábaco dos Inteiros" para multiplicar números inteiros e compreender a operação de multiplicação; Dedução natural da Regra dos sinais através da visualização e manipulação de situações que traduzam cada um dos casos da multiplicação [(+)x(+), (+)x(–), (–)x(+) e (–)x(–)].

Observação

Durante as aulas, a recolha de dados foi feita através da observação efectuada pela investigadora, em campo. Um estudo de caso, tal como este, envolve um trabalho de campo onde a investigadora e os participantes do estudo se podem, a dada altura, relacionar de forma estreita. Porém, o papel do observador pode assumir diversas modalidades, desde uma situação de espectador passivo a uma participação mais activa (Patton, 1987). Neste caso, optámos por uma observação passiva das aulas conseguindo-se, assim, uma observação mais focada na professora e nos alunos, alvos centrais da questão de investigação por nós formulada.

Na sala de aula, a investigadora utilizou uma grelha de observação pré-elaborada (Anexo 3), que utilizou para fazer os respectivos registos. Optou-se pela elaboração desta grelha pois servia de enfoque à própria observação e, simultaneamente, de registo da mesma, segundo os tópicos que, previamente, foram estabelecidos. Desta forma, conseguiu-se clarificar e simplificar o processo de recolha de dados, em campo.

De facto, a observação tem a grande vantagem de permitir registar comportamentos e acontecimentos à medida que estes vão tendo lugar (Matos, J., & Carreira,S., 1994). Apesar disso, não resumimos a recolha de dados decorrente da observação a estes registos imediatos efectuados nas grelhas. Da observação resultaram também *folhas sumárias de contacto* (Gall et al, 1996a), isto é, no final de cada aula, a investigadora/observadora elaborou um resumo da mesma, com os aspectos que entendeu serem mais peculiares desse contacto.

As entrevistas

A nossa estratégia de recolha de informação também incluiu duas entrevistas à professora Alexandra Martinho, ambas do tipo semi-estruturado, isto é, envolvendo perguntas fechadas e algumas abertas, que se destinaram a obter informação adicional e complementar, a qual contribuiu para um conjunto de informações mais razoável (Gall et al, 1996 b).

Werner e Schoepfle, citados por Lessard-Hébert, Goyette e Boutin(1994), consideram que a "técnica da entrevista é, não só útil e complementar à observação, mas também necessária quando se trata de recolher dados válidos sobre as opiniões e as ideias do sujeito observado"(p.160).

Estas entrevistas semi-estruturadas decorreram com grande liberdade de diálogo entre a investigadora e a entrevistada, no sentido em que a primeira seguiu, de forma flexível, as questões dos guiões (Anexos 4 e 5), numa constante tentativa de explorar os sentimentos e perspectivas da professora entrevistada. Qualquer das entrevistas foi gravada em cassetes audio, não havendo grande preocupação com o tempo destinado às mesmas, tendo sido ambas realizadas em horas combinadas por comum acordo entre a investigadora e a professora Alexandra.

Assim, a primeira entrevista foi realizada logo após a primeira aula (a da apresentação do Ábaco dos Inteiros, em que se abordou a Adição e Subtracção de números relativos neste material). Neste momento, os principais objectivos da entrevista foram:

- recolher informações sobre o perfil da professora (dados profissionais);

- conhecer as perspectivas da professora sobre os problemas gerais do ensino da Matemática;

- conhecer a metodologia usada no ensino da multiplicação de números inteiros relativos e as dificuldades ou ausência delas durante a sua prática;

- saber das dificuldades dos alunos com quem tem contactado, na aprendizagem da multiplicação de números inteiros relativos;

- perceber a opinião da professora em relação ao uso de materiais manipuláveis no ensino das operações com inteiros relativos;

- perceber quais as expectativas que tinha em relação à aplicação deste material na aula que, posteriormente, se iria realizar (aula da multiplicação de inteiros relativos).

Esta foi uma entrevista que se desenrolou a partir de um esquema básico, porém não rígido, como já referimos, o que permitiu à investigadora obedecer a uma certa lógica, dando sequência aos assuntos que se pretendiam desenvolver e, ao mesmo tempo, realizar as adaptações necessárias (Ludke, M. & André, M., 1986).

Após a primeira entrevista, esta foi transcrita e disponibilizada à professora para ler dando-lhe a possibilidade de realizar os ajustes que achasse convenientes, aumentando, assim, a validade dessa recolha de informação.

A segunda entrevista foi realizada cerca de um ano após a 2ª aula – aula da multiplicação de números inteiros relativos, com o *Ábaco dos Inteiros* – ou seja, após a implementação da proposta de ensino, depois de deixar passar algum tempo da mesma, de forma a podermos avaliar o impacto que esta experiência teve ao longo desse tempo.

Assim sendo, com esta segunda entrevista pretendíamos recolher as opiniões da professora sobre:

- a adequação desta proposta a alunos de 7.º ano;
- se esta proposta facilita ou não o ensino da multiplicação de números inteiros relativos;
- se esta proposta facilita ou não a aprendizagem de números inteiros relativos;
- se os alunos recorrem, sem a presença do àbaco dos Inteiros, à representação mental ou esquemática da mesma, para resolver situações problemáticas;
- se as dificuldades que os alunos, normalmente, demonstram nesta matéria são diminuídas com esta abordagem;
- se os erros decorrentes da aprendizagem da tradicional Regra dos Sinais (ao ser aplicada na Adição) diminuem ao ser introduzido este tipo de material e esta abordagem;
- a importância ou não da disponibilização deste material nas salas de aula /escolas.

Resumindo, com esta entrevista pretendemos recolher a opinião da professora sobre aspectos tão importantes quanto os reais efeitos e contributos desta proposta, no ensino e na aprendizagem da multiplicação de inteiros relativos, no 7.º ano de escolaridade.

No final desta entrevista, disponibilizámos, novamente, a sua transcrição à professora, com o intuito de aumentar a validade da mesma.

IV – Resultados da implementação da abordagem

IV.1 – O trabalho dos alunos e seus resultados

O trabalho realizado foi desenvolvido em duas aulas, as quais passaremos, de seguida, a descrever. Para além das aulas, também foram recolhidas respostas escritas dos alunos a uma questão colocada no final da segunda aula e que também iremos apresentar neste capítulo.

Em certas partes da análise dos resultados do trabalho dos alunos incluímos algumas citações de Alexandra Martinho, retiradas das entrevistas realizadas, porque achámos que consolidavam a fundamentação dessa análise.

1ª Aula

Como já tínhamos referido no capitulo da Metodologia, o objectivo principal desta aula foi a apresentação do material – o "Ábaco dos Inteiros" – como um instrumento de cálculo manual com números inteiros. A intenção era que os alunos se familiarizassem com o ábaco a ponto de conseguirem representar números inteiros no mesmo e de conseguirem operar estes números, inicialmente, ao nível da adição e subtracção.

Esta aula foi acompanhada de uma ficha de apoio (Anexo 1) e o que apresentamos de seguida são os resultados observados e registados durante a mesma.

A introdução histórica que se fez do material interessou à generalidade dos alunos, que facilmente completaram os espaços em branco desta parte da ficha.

Os alunos estavam bastante expectantes desde que o ábaco foi distribuído pelas suas mesas, e notou-se alguma ansiedade e curiosidade em torno deste material, que ainda não sabiam como ia funcionar.

Fig. IV.1. – Foto dos alunos com os “Ábaco dos Inteiros” nas suas mesas de trabalho

A professora informou os alunos que cada “bolinha” vermelha do ábaco representaria uma unidade positiva e cada “bolinha” preta representaria uma unidade negativa, começando por lhes pedir que colocassem no ábaco 10 “bolinhas” pretas e 10 “bolinhas “ vermelhas. Todos os alunos se envolveram, de imediato, com a tarefa, colocando as “bolinhas”, ainda que, nesta fase, um pouco a medo. De seguida, a professora questionou:

“-Qual o número que poderá estar aqui representado?”

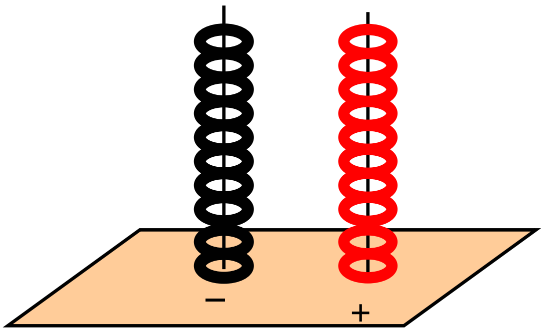


Fig. IV.2 - Ábaco dos inteiros, com uma possível representação do número “zero”

Muitos alunos observavam ainda o ábaco quando um aluno responde “-É o numero 20!”. A professora reformulou, então, a questão:

“-Qual é o balanço final desta representação, há mais unidades positivas ou negativas?”

Aí, a maioria dos alunos disse que o ábaco “ estava em equilíbrio”, portanto, o número que estava representado era o “0”.

A professora aproveitou esse termo “equilíbrio” como sendo o termo intuitivo que os alunos associariam ao número 0 e perguntou, então, o seguinte: “ Será que há outras situações de equilíbrio?”

Os alunos, alternadamente, iam dando o seu exemplo: “5 bolinhas pretas e 5 vermelhas”; “1 bola preta e 1 vermelha”; etc.

Esta situação de "equilíbrio" ficou então associada à representação do número zero, que se conseguia sempre que o número de unidades positivas fosse o mesmo que o número de unidades negativas, ou seja, o zero resultaria da representação simultânea de dois números simétricos.

A professora demonstrou uma calma e uma preocupação com a comunicação com os seus alunos constantes, que foram muito importantes na explicitação da tarefa, do material e na clareza com que confrontou os alunos com certos aspectos que seriam importantes no decorrer da actividade. Um dos aspectos com que se preocupou foi, realmente, com a "representação do zero", pois todas as situações operatórias posteriores partiriam de uma representação deste número e esta não seria, necessariamente, o ábaco "vazio".

Depois de os alunos terem representado e sugerido várias representações do "zero", representaram também, de diversas formas, os números positivos e negativos sugeridos na ficha. Todos os alunos o fizeram sem problemas, completamente envolvidos na manipulação do material e sem levantar quaisquer dúvidas.

Depois, na parte onde se começaram a efectuar as adições (ponto IV, da Ficha 1, Anexo 1), a professora começou por dar um exemplo esclarecendo que, na alínea a), onde constava a operação (+3) + (+2) =...., teriam que partir de uma situação de "equilíbrio" (qualquer representação do zero) e colocar três "bolinhas" vermelhas (+3) e juntar / adicionar depois duas "bolinhas", também vermelhas (+2). Pediu aos alunos que a acompanhassem com os seus ábacos e lhe dissessem o resultado: todos, sem excepção, responderam "dá 5, positivo!". A professora perguntou porquê e um dos alunos respondeu: "Porque fiquei com 5 bolas vermelhas para cima do zero!". Todos os alunos fizeram as adições indicadas na ficha envolvendo dois inteiros positivos com muita rapidez e facilidade.

No final dessas alíneas, a professora tentou conduzir os seus alunos a uma conclusão mais geral, perguntando-lhes:

"O que podemos concluir do sinal da adição de números inteiros positivos?", ao que os alunos responderam que tinha que "dar positivo", registando essa conclusão, ou seja, "(+) + (+) = + ".

Da mesma forma, no ponto seguinte (IV.2, Ficha 1, Anexo 1), com adições que envolviam dois números negativos, os alunos rapidamente concluíram que tinha que "dar negativo", pois juntavam sempre "bolas" pretas ficando com um excesso de "bolas" pretas.

A professora perguntava, frequentemente, se os alunos tinham alguma dúvida, e só depois avançava.

Chegou-se, então, à adição de dois números inteiros relativos em que um era positivo e o outro negativo. Os alunos fizeram todas as operações no ábaco, não se verificando qualquer problema na obtenção do resultado. Todas as alíneas eram corrigidas pela professora, que registava as respostas de alguns alunos, no quadro, e as confirmava com a restante turma. Até aqui, não houve qualquer problema e os alunos continuavam bastante envolvidos e confiantes.

No final deste ponto, a professora questionou, novamente, os alunos sobre o sinal do resultado das operações que efectuaram e um deles respondeu: "Pode dar os três, negativo, positivo ou zero, depende". Aí, a professora confirmou realmente que a sua resposta estava correcta, mas pediu-lhes que especificassem essas situações, completando os espaços do ponto V.4 (Anexo 1).

Alguns alunos demonstraram dificuldades na escolha dos termos para completar as frases, mas a professora acabou por deixar responder aqueles que estavam com o "dedo no ar" e os outros alunos acabaram por completar ou corrigir os espaços nesta altura.

Após terem sido feitos estes exercícios envolvendo a adição de dois números inteiros relativos e de terem sido discutidas as conclusões dos mesmos com o apoio do "Ábaco dos Inteiros", sugeria-se um exercício em que o material só deveria ser utilizado em caso de dificuldade. Muitos alunos fizeram o exercício sem recorrer ao ábaco; uns apenas mexiam com as "bolas" para cima e para baixo, simulando situações em que estariam a adicionar números sem ter que remover totalmente as suas peças; e outros apenas olhavam para o ábaco imaginando a situação operatória. Enfim, todos os alunos estavam a fazer o exercício de uma maneira ou de outra e notava-se um ambiente de grande envolvimento e também confiança, por terem um material perto de si que os poderia ajudar a obter as respostas correctas. Houve mesmo alguns alunos que acabaram o exercício tão rapidamente que a professora teve que lhes sugerir mais exercícios do manual, sobre a mesma matéria.

Constatámos ainda que os alunos que demoraram mais tempo a fazer o exercício foram aqueles que a professora considerava "os que têm mais dificuldades" e também foram esses que mais recorreram ao ábaco para efectuar as operações solicitadas.

Na correcção destes exercícios, quase todos os alunos tinham as respostas certas. No entanto, houve um aluno que, na alínea k) (-15)+(-12) tinha respondido que "dava (-3)"(resultado errado). Note-se que esta situação não dava para realizar neste ábaco, pois cada ábaco só dispunha de 12 "bolinhas" vermelhas e 12 pretas. No entanto, a professora pediu a esse aluno que tentasse imaginar como ficaria o ábaco se ele conseguisse colocar 15 "bolinhas" pretas e depois mais 12 "bolinhas" pretas. O aluno, imediatamente, corrigiu o resultado que tinha para (-27) (o resultado correcto), dizendo "ah, ficava com 27 negativas".

Depois deste exercício, ainda houve tempo (o que não tinha sido previsto para esta aula, pela própria professora) para abordar situações de adição sucessiva, ou seja, adições com mais de duas parcelas. Os alunos continuaram a efectuar as adições sem demonstrar dificuldades. O único problema que surgiu foi nas operações que envolviam números que não podiam ser representados no ábaco pela limitação do numero de peças. Nestes casos, muitos alunos diziam recorrer à imagem de como seriam se as colocassem, enquanto outros chegaram a desenhar esboços rápidos dessas situações. Um destes alunos, questionado pela professora pelo resultado da alínea g) (+5)+(-9)+(-5)+(+7), disse que "dava -2". A professora perguntou-lhe como tinha chegado ao resultado e ele respondeu: "fiz risquinhos no papel porque não tinha peças suficientes". Alexandra Martinho não chegou a lembrar ao aluno que, neste caso, poderia ter usado a Propriedade da Existência de Elemento Simétrico para simplificar o seu cálculo. Teria sido conveniente que o fizesse, pois conseguiria igualar a expressão que tinha à operação (-9)+ +(+7), a qual já poderia efectuar no ábaco.

Depois deste exercício envolvendo adições sucessivas, seguia-se um outro para relembrar as propriedades da adição que os alunos já conheciam aplicadas ao conjunto dos números naturais, fazendo-se agora uma extensão das mesmas ao conjunto dos números inteiros relativos, sempre pela voz dos alunos.

Embora estivesse incluído um exercício da subtracção na ficha 1, este conteúdo não tinha sido programado para esta aula. No entanto, houve alunos que chegaram a começar a fazê-lo, na aula, por já terem terminado os exercícios anteriores. A professora apenas esclareceu estes alunos que esta operação equivaleria, no ábaco, a retirar peças e não a adicionar, como até aqui.

A percepção geral que nos ficou desta aula foi que ela "correu muito bem", tanto para os alunos, que se envolveram activamente na tarefa, como para a professora, que conseguiu dar uma aula em que todos os seus alunos participaram e acompanharam. O objectivo pretendido foi totalmente alcançado, no sentido em que todos os alunos se envolveram com o material e perceberam que este serviria para representar números inteiros relativos e para os operar, por enquanto, ao nível da adição e subtracção.

Inicialmente, notou-se algum receio, por parte dos alunos, em mexer no material, sentimento que se foi transformando numa confiança crescente, que se notava no domínio e rapidez com que efectuavam as operações no "Ábaco dos Inteiros".

Além disso, podemos dizer que, ao nível da dinâmica da aula, as expectativas foram superadas, pois foi, realmente, uma aula muito participativa, activa e comunicativa, que surpreendeu até a própria professora. Segundo Alexandra Martinho:

-"Eles realmente foram muito mais rápidos do que quando 'dava' por aquele método 'mais tradicional' .";

- "Não tem comparação. (...)com isto foi completamente diferente: a dinamização dos miúdos, e mesmo a atenção deles, a participação deles, foi completamente diferente. Isso aí, só por isso aí, já valeu muito a pena."

2ª Aula

A primeira aula foi fundamental, principalmente, pela introdução que se fez ao material que iríamos utilizar daí para a frente – o "Ábaco dos Inteiros". No entanto, foi essencialmente para esta segunda aula que esse mesmo material foi escolhido – para a Multiplicação de números inteiros relativos.

As expectativas decorrentes do sucesso da primeira aula eram grandes e a professora estava bastante confiante que os seus alunos iriam compreender melhor e de uma forma mais activa um assunto, que, até aqui, era problemático e que, tradicionalmente, culminava com uma demonstração abstracta da Regra dos Sinais, que poucos alunos acompanhavam. Segundo Alexandra, “Havia sempre, no máximo, três alunos que conseguiam acompanhar o raciocínio(...)”, mas, depois da primeira aula e da aceitação do material, Alexandra, confrontada com a opinião da entrevistadora “(...)acho que eles hoje operaram muito bem, vamos ver na multiplicação...”, revela, então, as suas expectativas, dizendo “Eu acho..., tenho quase a certeza que vai acontecer o mesmo”.

Assim, deu-se início à segunda aula com uma conversa entre Alexandra e os seus alunos sobre o conceito de multiplicação. A professora começou por perguntar aos alunos:

“O que significa multiplicar, por exemplo, 2x3?”

Um dos alunos respondeu: “ 2x3 é duas vezes o número 3, dá 6!”.

A professora perguntou, de seguida: “E 5x2 ?”.

Um outro aluno respondeu: “5 mais 5 dá 10!”

Perante estas duas respostas, a professora concluiu, então, que a multiplicação era entendida como uma “adição sucessiva”, mas era necessário esclarecer ainda os conceitos de multiplicador e multiplicando, para que houvesse uma uniformização das acções que se iriam efectuar, mais tarde, no ábaco.

Assim sendo, Alexandra pediu que os alunos “olhassem” para o primeiro factor da multiplicação como sendo o multiplicador, referindo-se a este como o “chefe” da multiplicação, como aquele que “manda”, que indica quantas vezes se vai adicionar “o factor que vem a seguir”. Por exemplo:

- 2x3 seria duas vezes 3, ou seja, transformar-se-ía na adição sucessiva 3+3=6;
- 5x2 seria cinco vezes 2, ou seja, transformar-se-ía na adição sucessiva 2+2+2+2+2=10. Note-se que, antes deste “pacto” com os alunos, um deles já tinha respondido que 5x2 = 5+5 = 10, o que não está errado, mas na manipulação do material, mais tarde, poderia originar confusões decorrentes de uns alunos fazerem de uma maneira ou de outra, embora, dado a multiplicação ser comutativa, se produza o mesmo resultado nos dois casos.

Os alunos perceberam estes aspectos, pois, quando questionados pela existência de dúvidas, não as manifestaram. Alexandra Martinho optou por não introduzir, nesta altura, a questão do multiplicador negativo, esperando que ela surgisse depois, para aí questionar os alunos e esclarecer este aspecto.

Seguiu-se, então, para a Ficha 2 (Anexo 2), que iria acompanhar as actividades desta aula. Os ábacos já tinham sido distribuídos pelas mesas (um por cada mesa, ou seja, um para cada dois alunos) e grande parte dos exercícios da ficha ia ser feita com o auxílio deste material.

Assim, o primeiro exercício (V. I.1, Ficha 2, Anexo 2) "pedia" apenas que os alunos transformassem multiplicações com números naturais em adições sucessivas, o que os alunos fizeram, respeitando o "pacto" estabelecido para o multiplicador (1.º factor) e multiplicando (2.º factor). Aqui, não houve dúvidas.

Seguia-se, então, o primeiro caso da multiplicação entre dois números inteiros não negativos (V. I.2, Ficha 2, Anexo 2):

- a primeira multiplicação que se pretendia que os alunos efectuassem no ábaco era (+2)x(+3). Quando a professora perguntou como poderiam fazer essa operação no ábaco, um dos alunos respondeu logo que tinha que "pôr duas vezes o n.º 3, no ábaco" e pôs uma vez três "bolinhas" vermelhas e, outra vez, outras três "bolinhas" vermelhas, verificando que o resultado era o já esperado: +6;
- a outra multiplicação era (+3)x(+4) e, aí, todos os alunos colocaram no ábaco três vezes um grupo de 4 "bolinhas" vermelhas, constatando que "dava 12";
- seguiu-se o exemplo 0x(+10) e houve um aluno que disse que "não podia pôr nenhuma vez 10 peças vermelhas", pelo que concluiu que 0x10=0;
- no caso (+3)x0, acabaram também por concluir que o produto era 0, porque "três vezes nenhuma peça" não alterava a situação de "equilíbrio" do ábaco, pelo que o resultado era 0.

Fig. IV.3 – Alexandra Martinho e os seus alunos de 7.º ano, trabalhando com o "Ábaco dos Inteiros"

Depois, surgia o caso da multiplicação entre um multiplicador não negativo e um multiplicando negativo. Alexandra foi estabelecendo um diálogo constante com os seus alunos, começando por perguntar:

"Como vamos fazer esta operação no ábaco: (+2)x(-3)?"

Uma aluna respondeu de imediato:

"Temos que colocar duas vezes 3 peças pretas!"

Os alunos colocaram, então, uma vez um grupo de 3 peças pretas e, de seguida, outro grupo de 3 peças pretas, verificando que o resultado foi o número –6.

Nesta altura, a professora comentou o seguinte:

"É a primeira situação que conhecem em que o produto 'dá' negativo. Por que é que isso acontece?"

Um aluno respondeu:

"Porque se repetem peças pretas."

Notava-se, nesta fase, um grande à-vontade dos alunos na manipulação com o ábaco e nenhum dos resultados lhes estava a causar admiração, não parecendo que os estivessem a achar difíceis de compreender. Os alunos demonstravam grande segurança nas respostas que davam e apoiavam-se no ábaco em quase todas as justificações.

Passavam, agora, à primeira situação em que 'apareciam' multiplicadores negativos – era o caso da multiplicação entre um multiplicador negativo e um multiplicando não negativo.

Logo no primeiro exemplo, (-3)x(+2), a professora perguntou:

"O que significa o (-) no multiplicador?"

Um aluno pediu a palavra para responder:

"Em vez de pormos peças, retiramos peças. Retiramos três vezes duas peças vermelhas."

Aqui, a professora chamou a atenção para o seguinte:

" Então, é melhor pôr uma situação de equilíbrio (0) com bastantes peças, para as podermos retirar!"

E logo os alunos começaram a colocar peças vermelhas e pretas, no ábaco, de forma a conseguirem efectuar estas multiplicações em que iriam ter que retirar peças.

A partir desta clarificação dos multiplicadores aos alunos, eles, naturalmente, encararam a multiplicação como uma adição sucessiva, em que tanto podiam somar sucessivamente o mesmo número inteiro, como subtraí-lo sucessivamente. Este foi um momento importantíssimo da aula, em que Alexandra Martinho teve um papel mediador fundamental no alargamento da aplicabilidade do conceito de multiplicação (como adição sucessiva) a todo o domínio dos inteiros relativos. Esta situação, habitualmente, é transportada abstractamente, através da Propriedade Comutativa, para o caso anterior, em que o multiplicador é positivo, fazendo com que o 'problema' se concentre no caso (-)x(-). Assim sendo, com este esclarecimento acerca do sentido dos multiplicadores negativos, os alunos 'chegam' ao caso (-)x(-) sem nenhum problema de 'ausência de sentido', o que não os obriga a tratar este caso de forma estritamente abstracta, como o fariam pelo método tradicional (em que usariam as Propriedades distributiva da Multiplicação combinada com a de Existência de elemento simétrico).

Seguiu-se, então, para o caso da multiplicação entre dois números inteiros negativos (I.5, Ficha 2, Anexo 2).

Alexandra, novamente, questionou a turma:

"Como se efectua, no ábaco, a operação (-2) x (-3) ?"

Uma aluna respondeu que "tinha que retirar duas vezes 3 peças pretas", acrescentando que ficava com 6 positivas, ou seja, (-2) x (-3) = +6.

De seguida, todos os alunos efectuaram os restantes exemplos e não houve um único aluno que questionasse o sinal do resultado. A atitude dos alunos manteve-se como até aqui: dominavam o que estavam a fazer, mostravam segurança nas suas respostas, e não questionavam o que viam acontecer.

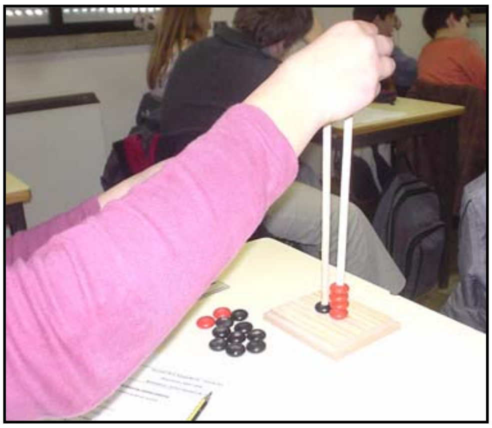


Fig. IV.4 – Aluna trabalhando no Ábaco dos Inteiros

Depois de abordados os quatro casos da multiplicação, Alexandra Martinho discutiu com os alunos as conclusões que poderiam registar acerca dos sinais dos vários produtos que efectuaram e foram os próprios alunos que construíram a Regra dos Sinais para a Multiplicação (V. I.6., Ficha 2, Anexo 2).

Depois de uma primeira abordagem com o total acompanhamento do ábaco em cada multiplicação, seguiu-se um exercício em que só era suposto utilizarem o ábaco em caso de dificuldade. Nesta altura, verificámos o mesmo que aconteceu na aula 1: havia alunos que já prescindiam do ábaco (a grande maioria); outros 'olhavam-no' apenas, imaginando como ficaria o resultado; outros substituíam a manipulação por um esboço rápido através de 'risquinhos' na folha chegando mais rapidamente ao resultado; e havia ainda um pequeno número de alunos dependente da acção no ábaco enquanto fazia os cálculos.

Fig. IV.5 – Aluna manipulando o "Ábaco dos Inteiros" enquanto registava o resultado das operações.

Voltámos a assistir a uma aula em que todos os alunos se envolveram na actividade, em que todos participaram, e em que todos se sentiram capazes. Não se registaram dúvidas nos conceitos de multiplicação, nem no de multiplicador ou multiplicando. No entanto, os alunos não usavam estes termos com frequência para se expressar. Além da dificuldade de utilização deste vocabulário específico, os alunos também revelaram alguma dificuldade com os termos associados às Propriedades das operações, nomeadamente, da Adição e Multiplicação. Por exemplo, nos exercícios em que os alunos deveriam completar espaços com palavras como 'Propriedade Distributiva', 'Propriedade Associativa', 'elemento simétrico', 'elemento absorvente', 'valor absoluto', muitos alunos, apesar de saberem o que querem dizer, não sabem como hão-de dizê-lo. São termos com os quais não se sentem familiarizados, uma vez que os usam muito pouco e só os usam num contexto matemático.

Por outro lado, quanto à compreensão da Regra dos Sinais, os alunos aceitaram-na como uma construção pessoal e não a discutiram , ela foi aceite naturalmente.

Depois de terem construído a *Regra de Sinais* para a Multiplicação, com base nas conclusões que iam formulando no ábaco, e de terem feito um exercício com multiplicações com dois factores, foi proposto aos alunos que fizessem, agora, um outro exercício que envolvia multiplicações sucessivas. Alexandra deu liberdade aos seus alunos para usarem ou não o “Ábaco dos Inteiros”.

Verificámos que os alunos raramente o usaram e, nos casos de dúvida, ouvia-se sempre um aluno a dizer “sinais iguais dá mais” ou “sinais diferentes dá menos”, numa apropriação imediata da Regra dos Sinais, que agora lhes permitia celeridade nos cálculos e a qual não questionavam. A própria Alexandra Martinho, a partir dessa altura, repetiu estas expressões várias vezes.

Note-se que, neste último exercício, tinham sido incluídos alguns exemplos de multiplicações com números fraccionários, os quais não poderiam ser efectuados no “Ábaco dos Inteiros”. Por isso, houve um aluno, que, perante o exemplo (-5) x 0.2 , perguntou a Alexandra como o poderia fazer no ábaco, ao que esta relembrou que “neste ábaco, só trabalhamos com números inteiros” e, por isso, “não é possível fazer essa conta”. Alexandra lembrou ainda o aluno que “sinais diferentes, na multiplicação, dá menos”.

No exemplo anterior, notámos que, muitas vezes, a Regra dos Sinais é usada como a “tábua de salvação” da situação de dúvida. A própria Alexandra, a propósito do ensino da Regra dos Sinais, pelo método tradicional, refere que:

> “...eles deviam achar aquilo tão demais para eles que o que eles queriam, no fundo, era a salvação, e o professor, no fundo, também se sente um bocado aliviado por dizer: - Afinal isto é sempre assim. Fazem sempre isto! (...) É tipo uma tábua de salvação e aquilo usa-se no futuro.”

Respostas escritas dos alunos

No final da segunda aula, foi lançada a seguinte questão aos alunos:

"Por que é que menos vezes menos dá mais?"

Os alunos desta turma de 7.º ano teriam que responder a esta questão, por escrito e entregar, posteriormente, à professora. Por sua vez, esta disponibilizar-nos-ía as mesmas.

Das 26 respostas analisadas, pudemos constatar o seguinte:

- <u>21 alunos</u> suportaram a sua explicação em exemplos que davam com o "Ábaco dos Inteiros", material com que tinham trabalhado ao nível da operação de multiplicação de números inteiros relativos. Vejamos alguns exemplos dessas respostas:

🖉 "Menos são bolas pretas e + são bolas vermelhas, vamos supor que se tira 3 x 4 bolas pretas, dá 12 bolas vermelhas: (-3) x (-4) = +12." Maria

🖉 "Menos vezes menos dá mais porque se tirarmos, por exemplo 2 grupos de 3 aos negativos o lado positivo dá 6: (-2) x (-3) = +6." Luís C.

🖉 "Menos x menos dá mais porque tirando negativas sobram positivas" Paulo

Dentro destas 21 respostas, houve 6 alunos que desenharam mesmo o ábaco para explicar a sua resposta. Vejamos também alguns desses exemplos:

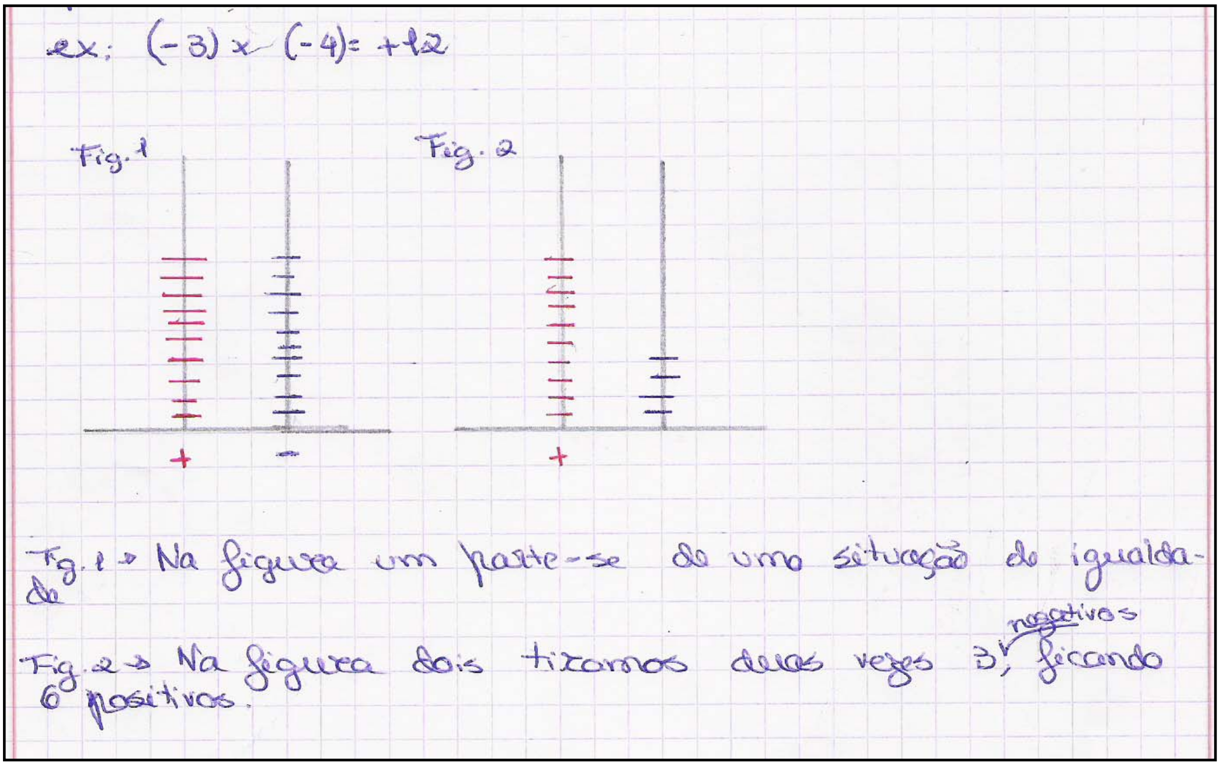


Fig. IV.6 – Resposta da aluna Corália.

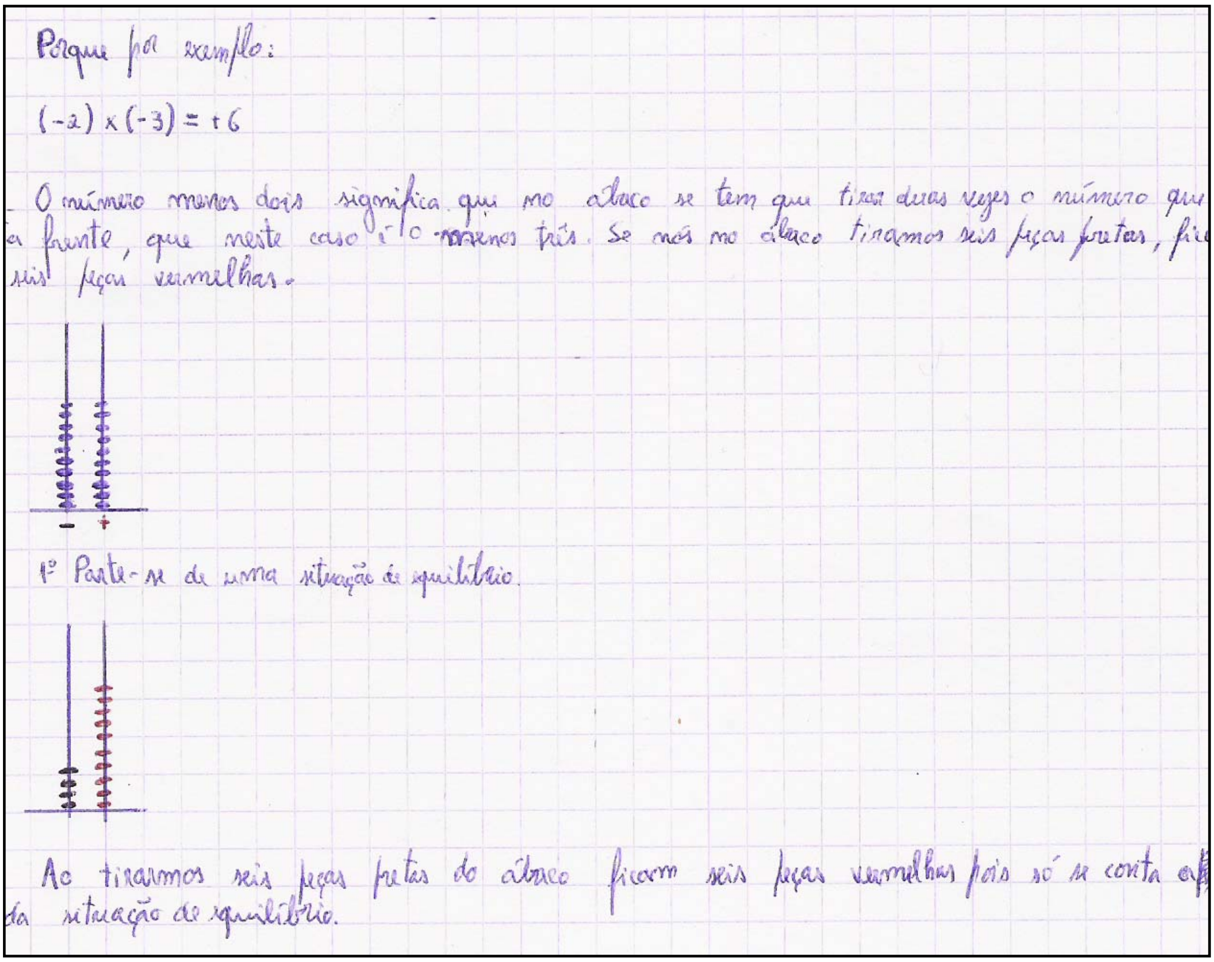


Fig. IV.7 – Resposta do aluno Filipe.

- <u>2 alunos</u> basearam a sua resposta na construção de uma sequência de produtos, apresentada numa tabela, como se pode ver na figura seguinte:

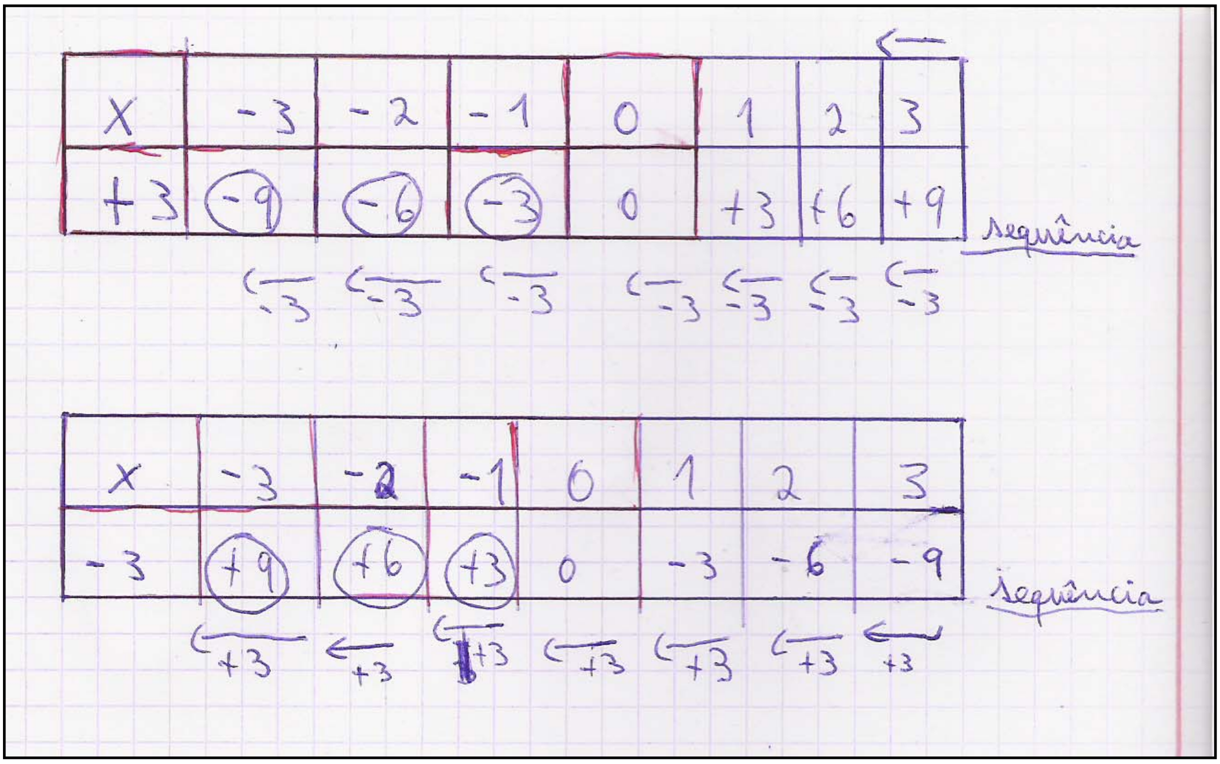


Fig. IV.8 – Resposta do aluno Luís M.

- os restantes <u>3 alunos</u> limitaram-se a justificar que menos vezes menos dá mais, porque sinais iguais dão mais.

Da análise destas respostas, resta-nos concluir que a grande parte dos alunos explica da mesma forma que lhe explicam, ou seja, se o aluno compreendeu que a multiplicação de dois números negativos produz um resultado positivo, através da experiência que teve com o “Ábaco dos Inteiros”, também vai explicar esse produto baseando-se no ábaco.

Os alunos, de uma forma geral, não demonstraram dificuldades nesta resposta, porque dispõem de uma explicação que, intuitivamente, faz sentido, por ser baseada na manipulação de materiais concretos, em que os alunos tiveram oportunidade de visualizar os resultados de diversas multiplicações.

IV.2 – A professora e suas perspectivas

Perfil da Professora Alexandra Martinho

A professora é efectiva, do quadro de nomeação definitiva, no 1º grupo do 3º ciclo e ensino secundário, numa escola Básica EB2,3, do distrito de Braga. Dá aulas há 16 anos e tem a Licenciatura em Matemática (via ensino) pela Faculdade de Ciências de Universidade do Porto.

Desde que terminou o curso, leccionou no Ensino Recorrente, Básico e Secundário. Actualmente, apenas lecciona no Ensino Básico.

A professora, desde logo, demonstrou interesse pela actividade que lhe propusemos, aceitando-a com agrado, mostrando-se disponível e aberta ao assunto.

Alexandra "vê" a Matemática como uma ciência que ajuda "a estruturar e organizar tudo aquilo que nos rodeia", capaz de nos dotar de ferramentas de concentração e raciocínio, que se aplicam a várias outras áreas científicas. Além disso, é da opinião de que o ensino da Matemática deve mover-se, sempre que possível, de um plano "concreto para o abstracto", defendendo que esta é uma questão que pode influenciar o sucesso das aprendizagens dos alunos.

Alexandra sempre gostou de Matemática e relaciona esse gosto com as boas recordações que guarda dos seus professores de Matemática: "Sempre gostei de Matemática! (...) Eu acho que dependeu um bocado disso, porque tive sempre bons professores."

A professora não se recorda de sentir dificuldades na disciplina, admitindo mesmo: "até ao 9º ano, eu nem me lembro de estudar."

Dificuldades que sente como professora

Alexandra, quando questionada acerca das dificuldades que sente no ensino, aponta o seguinte:

- as turmas serem muito grandes;

- o facto de os professores serem, hoje, solicitados para "preparar muita coisa", dando os exemplos das disciplinas de Estudo Acompanhado, Formação Cívica, Área de Projecto, Direcção de Turma. Desabafa que "é muita coisa e não há tempo para isto tudo. (...) E há coisas a que nos podíamos dedicar com mais cuidado, nomeadamente, até, este tipo de actividades, mas estamos requisitados para muita coisa, muita burocracia."
- "haver turmas com alunos muito bons e, nessas turmas, depois, haver certos grupos de alunos retidos, completamente desmotivados para o ensino, que já não deveriam estar ali (...) onde, só o facto de não fazerem nada, já incomoda!";

Ao nível das matérias que lecciona, a professora apontou ainda outros tipos de dificuldades, as que são sentidas e reveladas pelos alunos. São elas:

- <u>as fracções</u>, dizendo que "As fracções, por exemplo, é uma coisa que, tendo sido já abordada no 2º ciclo, no 7º ano seria só uma repetição, mas continuam a aparecer alunos que somam os denominadores ... É escusado! Somam os denominadores; e, quando fazem as multiplicações, fazem-nas cruzadas como se fosse uma divisão;
- <u>a multiplicação de números negativos.</u> Segundo Alexandra, "Eu agora estou a acompanhar a turma do 8º ano que tive no 7º ano e as dificuldades passaram de um ano para o outro e é, sem dúvida, a multiplicação de números negativos, os sinais."

Dado que a professora tinha focado o problema da multiplicação de números negativos e da confusão de sinais, perguntamos-lhe se isso também não acontecia na Adição e Subtracção de números relativos, ao que ela nos respondeu que, nestas operações "não costuma haver problemas". Alexandra revelou-nos que o problema surge com a multiplicação: "Enquanto que é só a adição, tudo bem, mas, a partir do momento que se dá a multiplicação, como há uma mistura das várias situações, (...) aí há problemas."

Alexandra é da opinião que a Adição e Subtracção são sinais mais fáceis porque:

"eu uso sempre aquele exemplo das dívidas, do dinheiro que tem e do que gasta; se for a mais que uma loja gastar dinheiro e ficar a dever em várias lojas ..., isso já lhes é mais familiar. Na multiplicação é que é mais complicado..."

Note-se que esta complicação que aparece com a multiplicação surge de facto de a própria professora não dispor de exemplos que sejam, de uma forma intuitiva, rapidamente aceites pelos alunos.

O Ensino da Multiplicação

A professora associa a multiplicação a uma "adição repetida" e revelou-nos que costuma explicar os primeiros casos da multiplicação de números inteiros relativos [(+)x(+) e (+)x(-)] com base neste conceito. Por exemplo:

1) 2x3 = 3+3 = 6
2) 2x(-3) = (-3)+(-3) = -6

Quanto ao caso (-)x(+), através da Propriedade Comutativa, transforma-o no caso (+)x(-), reduzindo-o ao caso anterior.

Quanto à multiplicação entre dois negativos, confessa-nos que durante muitos anos se socorreu também das propriedades aritméticas:

> "os alunos já tinham "percebido" que (-2)x(+7) dava –14 e depois, aplicando as propriedades, eles iriam concluir que (-2)x(+7) teria que dar +14. Provava-lhes isso no quadro. Antes, avisava-os que ía ser um raciocínio que precisava da propriedade distributiva, pôr em evidência ... Claro que uns começavam logo a desligar, porque essas palavras já lhes estavam a causar logo grande confusão. Havia sempre, no máximo, três alunos, por turma, que conseguiam acompanhar o raciocínio (...)".

É nítida a dificuldade de os alunos iniciarem determinado aspecto novo numa operação, como é a introdução de números negativos na multiplicação, sem uma base concreta, nem que seja de um exemplo concreto que acompanhe o raciocínio e os convença, de facto, do resultado da operação.

Alexandra acrescentou ainda: "Uma pessoa explica a dedução uma vez e nunca mais volta a explicar porque quase ninguém acompanha". Por isso, a professora, no ano lectivo anterior, decidiu seguir um exemplo do manual que relacionava a multiplicação de números inteiros relativos com situações de dívidas, onde a matéria era apresentada "de uma maneira que proporcionava aos alunos um melhor entendimento; (...) Eles aceitavam aquela demonstração porque viam-na a aparecer. (...) Eu tentava que fossem eles a dizê-la e eles aceitavam que realmente tinham conseguido chegar lá e depois aceitavam aquilo para o futuro."

Perguntámos a Alexandra Martinho se os seus alunos não questionavam mais as conclusões a que chegavam depois dessa primeira abordagem, das quais resultava, invariavelmente, a Regra dos Sinais. A professora respondeu-nos que dizia mesmo aos seus alunos que "não podia estar sempre a demonstrar a Regra dos Sinais, mesmo por uma questão de tempo (...). Aquilo era tipo um pacto, eles aceitavam e depois também usavam."

Voltamos a questionar Alexandra sobre a Regra dos Sinais, perguntando-lhe se nunca tinha pensado numa situação real ou concreta que a exemplificasse, ao que ela nos confessou: "Pensei, mas não arranjei."

Alexandra acrescentou, de seguida, que se tivesse conseguido arranjar um exemplo, como tem para a Adição Algébrica (com as dívidas), seria muito mais fácil resolver as dúvidas dos alunos, quando elas surgem, e de uma forma mais imediata:

"Na multiplicação é que (...) principalmente entre dois negativos... Aí sinceramente, eu não lhes consigo dar uma resposta, assim, que seja rápida, que saia na hora e não gaste muito tempo".

Regra dos Sinais da Multiplicação – a "tábua de salvação"

A professora, durante as entrevistas, referiu-se várias vezes À Regra dos Sinais como uma tábua de salvação, que surgia no fim de uma demonstração abstracta (através de propriedades aritméticas) de que os alunos não queriam depender. Por isso, quando aparece, como conclusão dessa demonstração, uma Regra dos Sinais, que "funciona" para todos os casos, os alunos imediatamente se apropriam da mesma, não tendo que voltar à tal demonstração. Se não, atentemos nas palavras da professora:

"Eu acho que eles, ao verem aquela demonstração, o que eles querem é tipo uma tábua de salvação, é a regra. (...) eles deviam achar aquilo tão demais para eles que o que eles queriam, no fundo, era a salvação. (...)"

Perante esta situação, quisemos saber se Alexandra achava que os alunos compreendiam a Regra dos Sinais ou se era só mesmo uma "tábua de salvação", ao que esta nos respondeu o seguinte:

"Eu acho que é a tábua de salvação. É. E, principalmente, repito, no caso dos dois negativos."

Confrontada com a opinião da entrevistadora que aí comentou que: "Então eles vão aceitando a ideia ...", a professora conclui o seguinte:

"Digamos que eles, em termos concretos, não devem ter nenhuma ideia."

Ora, sabemos , através da própria revisão de literatura que efectuámos, a lacuna que esta ausência total de uma situação concreta, em que o aluno possa basear o seu pensamento operatório, provoca na aprendizagem da Matemática e, em particular, na aprendizagem das operações, principalmente em alunos de 7º ano.

Estas lacunas, que a própria professora assume existirem com toda a honestidade, vão traduzir-se, mais tarde, em dificuldades. Por exemplo, acontece, em relação à Regra dos Sinais, que os alunos passam a aplicar a regra decorada também à Adição, fazendo cálculos do tipo $(-3) + (-4) = +7$ (errado), porque "– com – dá +". Quando perguntámos a Alexandra sobre isso, esta confirmou-nos:

"Acontece muitas vezes, muito mesmo e em várias matérias a seguir. Por exemplo, nas equações, etc. Depois, isso é efeito "bola de neve"...

Aliás, depois, por exemplo, no 8º ano, quando se passa para os monómios e polinómios, vai acontecer exactamente isso. (...) e essa confusão até os bons alunos fazem."

Depois desta discussão, perguntámos a Alexandra se achava que a maioria dos alunos de 7º ano está preparada para perceber a multiplicação de números negativos, ao que esta hesitou um pouco na resposta, acabando por dizer o seguinte:

"Para usar sim, para perceber não, pelo menos o caso $(-)x(-)=+$, os outros, eles percebem, acho que eles percebem, podem depois até baralhar... mas talvez o que os baralhe seja mesmo este caso e que depois vá dar confusão na adição e nos casos anteriores, não é...

Porque é assim, a partir do momento que também nós não lhes arranjamos aqueles exemplos que eles consigam dominar, para eles, obviamente, vai ser mais complicado...”

Alexandra relaciona a razão de eles não compreenderem o caso (-)x(-) com o facto de, ela própria, não conseguir arranjar um exemplo concreto que pudesse facilitar essa compreensão. A professora sublinha, aqui, o papel destes exemplos intuitivos na compreensão das operações, fazendo mesmo deles depender a compreensão das mesmas.

Por isso, perante a possibilidade de o ensino da multiplicação de números inteiros relativos ser suportado, em todos os casos, por um material manipulável, em que os alunos pudessem visualizar, mexer, observar todos esses casos, sem excepção, Alexandra Martinho, quando questionada sobre se achava que as dificuldades poderiam diminuir, responde, prontamente:

“Acho, sem dúvida! Sem dúvida. (...) Mas não conheço materiais assim que se possam usar de uma maneira eficaz e que não seja muito demorada, não conheço”.

Apesar de a professora achar a utilização deste tipo de materiais importante, principalmente, no caso da multiplicação de números negativos, ela deixa transparecer claramente a preocupação que tem com o tempo que se demora neste tipo de actividades.

Parece, pois, revelar-nos uma ideia de que a sua utilização é, normalmente, mais demorada do que uma abordagem que não utilize estes materiais.

Quando questionada sobre os materiais manipuláveis com que já tinha contactado, Alexandra referiu apenas o *Tangran*, que usa quando ensina a decomposição de figuras, no 8º ano. Embora só refira este exemplo, a professora confessa-nos que a aceitação do material por parte dos alunos: “É óptima!(...) Eles adoram! Sem dúvida. São aulas que passam sempre mais rápidas que as outras.”

Em relação ao “Ábaco dos Inteiros”, material escolhido para esta experiência, a professora diz-nos que o acha um óptimo material, acrescentando que acha que vai ser eficaz. Comenta, ainda que “é um material simples e fácil de transportar. Pode até o professor levar sempre um e, em caso de dúvida, mostra-o àqueles alunos com mais dificuldades”, mas “claro que, no início, sempre com todos os alunos”.

- ***Depois da primeira aula*** (aula de apresentação do Ábaco dos Inteiros e sua utilização na Adição)

O primeiro comentário que Alexandra fez à primeira aula foi o seguinte:

"Falando da aula de hoje, eu acho que foi a primeira vez que eu dei a adição e a adição sucessiva na mesma aula. (...) E isto sem haver grandes dúvidas."

Quanto ao seu receio de que esta abordagem demorasse mais tempo, Alexandra surpreendeu-se, revelando-nos que:

"(...) dar a adição, a adição sucessiva e as propriedades da adição, coisa que eu até achava que iria ser mais demorada com a utilização do Ábaco, revelou-se mais rápida(...) Aliás, no final da aula, houve alunos que já estavam a fazer a subtracção sem lhes dizer nada, sem lhes dar informação nenhuma(...)".

A professora ficou, de facto surpreendida, com a rapidez e a facilidade com que os alunos manipulavam e operavam ao nível da adição com o "Ábaco dos Inteiros". Isso fê-la concluir que os alunos "entenderam muito bem, no geral" e aumentou-lhe as expectativas em relação à aula que se avizinhava, da multiplicação de números inteiros relativos. Quando a entrevistadora, que também observou a aula, comentou com Alexandra: "Eu também acho que eles hoje operaram muito bem, vamos ver na multiplicação..." a professora respondeu de imediato: "Eu tenho quase a certeza que vai acontecer o mesmo."

Esta expectativa da professora é muito positiva, pois, até aqui, falava-nos do ensino da multiplicação de números relativos como algo que os alunos não compreendiam bem e que ela própria tinha dificuldades em explicar melhor, referindo mesmo que a Regra dos Sinais era a "tábua de salvação" da situação que tanto os alunos como ela se apropriavam, não por lhe conferirem um sentido concreto [pelo menos, nos casos (-)x(+) e (-)x(-)] mas porque isso lhes permitia não pensar na demonstração abstracta que os alunos não acompanhavam e porque, no fundo, era o único elo seguro entre essa operação e a obtenção de uma resposta correcta para a mesma.

- ***Depois da segunda aula*** (aula da multiplicação de inteiros relativos usando o Ábaco dos Inteiros)

No final da primeira aula, a professora tinha ficado surpreendida com a rapidez com que os seus alunos do 7º ano interiorizaram o funcionamento deste material e com o curto espaço de tempo em que tinha “dado” a Adição de números inteiros relativos. Esta constatação tinha-lhe provocado grandes expectativas quanto a esta 2ª aula. Por isso, a primeira pergunta que lhe fizemos após esta aula foi se tinha confirmado essas expectativas ao que ela respondeu:

“Totalmente. Eles realmente foram muito mais rápidos do que quando “dava” por aquele outro método mais “tradicional”.”

Efeitos após a implementação da experiência

Os principais efeitos da experiência com o Ábaco dos Inteiros que a professora identificou depois desta 2ª aula, da Multiplicação de números inteiros relativos, foram os seguintes:

1) acha que os seus alunos, que estão agora no 8º ano, quando se pergunta sobre os sinais, por exemplo, nas operações com monómios respondem com mais facilidade. Segundo Alexandra, ela acha “que eles fazem isso melhor”;
2) acha que as dificuldades nesta matéria diminuíram quer “quando eles estão a aprender, quer quando praticam depois”;
3) os resultados obtidos decorrentes da avaliação foram melhores. Segundo Alexandra, “os resultados foram especialmente melhores do que no ano anterior, por exemplo, em que também tive turmas de 7º ano”;
4) as principais melhorias detectadas na avaliação foram em questões em que juntava adições e multiplicações. Como diz Alexandra, “aí é que eu acho que as coisas ficaram muito mais simples para eles. Eles próprios, depois, quando eu lhes recordava o Ábaco, eles próprios

tiravam a dúvida a eles mesmos. Já não era preciso tentar interferir nesse nível.(...) era mais fácil, sem dúvida."

5) quanto aos erros mais frequentes associados à confusão de sinais entre a adição e a multiplicação, revelados pela própria professora durante a entrevista anterior, esta revelou-nos que "a maior parte dos alunos os faz menos", acrescentando, no entanto, que "há ainda uma percentagem que continua a fazer, mas eu acho que mais rapidamente eles corrigem."
6) a dinamização da aula foi incomparavelmente melhor com a que conseguia pelo método "tradicional".

Segundo Alexandra, "–Não tem comparação (...), com isto foi completamente diferente: a dinamização dos miúdos, e mesmo a atenção deles, a sua participação foi completamente diferente. Isso aí, só por isso, já valeu muito a pena". O rendimento da própria aula melhorou muito, "porque as coisas 'deram-se' com menos tempo e tiveram um efeito mais imediato". De acordo com Alexandra, "houve menos gasto de tempo a dar aquela matéria porque foi muito mais rapidamente assimilada."

Compreensão da operação

Quando questionámos a professora sobre as diferenças que teria ou não detectado ao nível da compreensão da operação de multiplicação, nomeadamente, da multiplicação envolvendo números negativos, a sua resposta foi afirmativa:

"Sim... eu acho que eles percebem aquilo, acho que durante a aula eles percebiam o que estavam a fazer no ábaco."

No entanto, passado um ano, em que os alunos já se habituaram a fazer a maior parte dos cálculos na máquina calculadora, Alexandra revelou-nos que "Agora, no 8º ano, as coisas estão um bocadinho mais diluídas, embora ainda estejam lá e eles se recordem. Mas o eles "meterem" na calculadora e a calculadora acabar por lhes fazer as contas todas muitas vezes, ... é natural que se tenha diluído em bocadinho(...)".

Depois deste comentário da professora, quisemos saber se esta achava que o material deveria ter estado disponível aos alunos durante mais tempo, para combater essa diluição que anteriormente nos confessou ter notado, e mesmo para combater os erros que, aqui ou ali, vão ocorrendo, fruto da confusão de sinais entre a multiplicação e adição. Alexandra, a propósito deste aspecto, distinguiu dois tipos de alunos:

1) "aqueles que realmente perceberam e que depois têm outra capacidade de memorização, de raciocínio e de abstracção." Para esses, diz-nos que "o material não faça tanta falta depois";
2) "e depois há outro tipo de alunos, que, pelas suas características, as coisas perdem-se mais rapidamente de um ano para o outro". Para esses, sugere-nos que seja "talvez vantajoso pelo menos recordar o material, trabalhando novamente com ele".

Concluindo, de acordo com Alexandra, para os alunos que revelam ainda um pensamento muito concreto e que, dificilmente, realizam abstracções e memorizações, poderia ser vantajoso um contacto mais alargado no tempo com este material (Ábaco dos Inteiros): "este tipo de alunos precisa mesmo de mexer, de tirar, de ver outra vez, porque ainda não têm aquela capacidade..., nem de se recordar como é que acontecia, ... pronto ... há alunos que têm essa dificuldade.", enquanto "para os outros acho que não, já estão a um nível em que já abstraem muito rapidamente, recordam, e já não têm problemas."

A propósito destes alunos que Alexandra acha que deveriam utilizar o material mais vezes, a professora revelou-nos o seu desejo de ver este material nas escolas "para se poder requisitar o material para a sala de aula, principalmente, para esse tipo de alunos com mais dificuldades."

Comparações estabelecidas entre a Proposta do "Ábaco dos Inteiros" e outras mais "tradicionais"

Quando perguntámos a Alexandra de que forma fazia a comparação entre esta proposta e as restantes que tinha vindo a usar, ela respondeu o seguinte:

"É assim, eu acho extremamente vantajoso usar este material na apresentação desta matéria, sem dúvida(...) Basta as outras serem mais teóricas, mais complexas e não serem palpáveis também." Alexandra sublinhou, depois, a importância do uso de um material manipulável como contributo essencial para as diferenças verificadas: "a partir do momento em que há um material que eles mexem, é completamente diferente, as vantagens são totais. Porque eles mexem e eles vêem, enquanto nas outras eles têm que se abstrair, têm que idealizar uma situação mentalmente.

Posteriormente, acrescenta ainda, em relação a diferenças verificadas no nível da compreensão operatória dos alunos:

"Aí, eu acho que é 100% vantajoso em relação aos outros métodos. Quer dizer, o efeito é praticamente imediato. O aluno não tem que fazer grande esforço, é uma coisa tão imediata, tão visível que fica logo."

Quanto a diferenças verificadas na perspectiva de quem ensina, Alexandra também aponta vantagens, dizendo-nos que é extremamente compensador ver a turma toda motivada e a trabalhar:

"Até é mais visível, porque a turma está toda motivada, eu acho que eles estavam todos super motivados e a trabalhar.(...)

Aqui, eu acho que eles acompanharam todos, os mais fracos, inclusive, estavam muito motivados, lá está, é um material que eles vêem, em que mexem e obriga-os a estar concentrados".

A professora falou-nos ainda de um aspecto importante, que é o de auto-estima e confiança com que os alunos saíram desta aula, em contraste com o que acontecia quando usava outros métodos.

Desvantagens

Também perguntámos à professora Alexandra Martinho quais as desvantagens que encontrou durante a realização desta proposta de ensino da multiplicação, no 7º ano.

A professora disse apenas que a desvantagem que pensava que teria, antes mesmo da realização da experiência, era o facto de achar que iria demorar muito mais tempo; "porque as fichas que elaborámos, na altura, poderiam parecer muito extensas, com muitos casos particulares."

Além disso, Alexandra referiu também a desvantagem das próprias "bolinhas" do Ábaco, "que podiam cair e, em termos disciplinares, originar outro tipo de situações".

No entanto, segundo Alexandra, depois da concretização, "quer pelas características da turma, quer pelas características do material, a questão do tempo não se verificou, antes pelo contrário, foi muito mais rápido, eles acabaram por fazer a ficha muito mais rapidamente do que o que eu tinha imaginado, puderam até, depois, fazer exercícios do livro..."

A professora concluiu, portanto, que "As desvantagens que previa não se verificaram", acrescentando ainda, quanto à questão da turma, que este método "pode funcionar em qualquer turma do 7º ano, excepto naquelas que são muito indisciplinadas e que realmente não se consiga, mas, mesmo nessas, não é certo que não se consiga (...) até pode ser que funcione e que até seja uma maneira de cativar esse tipo de alunos."

Vantagens

Dado que todos os efeitos que a professora descreveu anteriormente foram considerados vantajosos, optámos por não repetir esses comentários aqui.

Opinião final da professora

Para finalizar, sabemos que o trabalho do professor com materiais novos nem sempre é bem aceite, por este não se sentir seguro. Por isso, quisemos saber o que diria Alexandra desta proposta e deste material a um professor que não tivesse conhecimento dos mesmos.

Alexandra respondeu o seguinte:

"Eu acho que lhe tentaria explicar exactamente o que se passou com a minha turma (...) aquilo que eu pensava antes e as conclusões que tirei no fim. E entre as vantagens que já referi, aquela que eu focaria mais seria mesmo a dinâmica da aula, porque é completamente diferente. Aí é que eu acho que funciona bem e que há grandes diferenças. A dinâmica daquela aula, e era isso que eu diria a um professor que não conhecesse o material, aquela aula, que, à partida, é um bocado abstracta, teórica, aborrecida, digamos, pode transformar-se numa aula em que se consegue captar a atenção da turma toda, durante o tempo todo. Acho que é a principal vantagem. Tem a vantagem importantíssima de funcionar logo que é apresentado. Mesmo que não se conseguisse provar que ele é eficaz depois, ele é totalmente eficaz naquele momento. E embora eu não tenha provas comparativas rigorosas suficientes, intuitivamente, eu posso dizer que é muito melhor do que os outros métodos."

V– Conclusões

V.1 – Síntese do estudo

Este estudo foi motivado por uma insatisfação pessoal relativamente às abordagens escolares usuais do ensino da multiplicação de números inteiros relativos. Essa insatisfação foi-nos transmitida, primeiro, pela intuição que tínhamos que assim era, fruto de conversas informais com professores de Matemática; segundo, pela Revisão de Literatura efectuada, através da qual também constatámos opiniões neste sentido e, por último, confirmada pela professora que participou neste estudo.

Assim, partimos para uma pesquisa sobre o assunto, de forma a esclarecermos os problemas que a questão envolvia. Dessa pesquisa resultaram orientações importantes para o trabalho que desenvolvemos de seguida, pois clarificámos, previamente, os seguintes aspectos:

- objectivos actuais do Ensino da Matemática;
- o problema dos métodos de ensino;
- as perspectivas psicológicas (nomeadamente, as de Piaget, Bruner e Vygotsky), que nos oferecem importantes contributos para o conhecimento do desenvolvimento cognitivo da criança, e das quais retiramos as implicações pedagógicas essenciais;
- a importância da “compreensão” no processo de ensino e aprendizagem da Matemática;
- os materiais manipuláveis (aspectos relacionados com a sua utilização e cuidados a ter);
- o processo de ensino e aprendizagem das operações;
- a operação de Multiplicação (os conceitos e estratégias a ela relacionados, o sentido concreto que se lhe atribui, as principais dificuldades reveladas na operação);
- a multiplicação de números negativos (diferentes abordagens).

Perante este quadro de referências, pareceu-nos pertinente a implementação de uma proposta de ensino da multiplicação de números relativos, para o 7.º ano, baseada na utilização de materiais manipuláveis, ou seja, optámos por uma abordagem de carácter intuitivo, que se suportasse em materiais físicos. Escolhemos, por isso, o “Ábaco dos Inteiros” como o material que iria suportar essa experiência, o qual teve que ser construído (cerca de 30 ábacos) propositadamente, dado não existir no mercado.

A questão central da investigação foi, então, a de saber se esta abordagem da multiplicação de números inteiros relativos, para o 7.º ano, era ou não efectiva. Definimos, assim, dois objectivos principais: o de saber se esta abordagem era facilitadora tanto da aprendizagem desta matéria como do ensino da mesma.

Dada a natureza destes objectivos, foi seguida uma metodologia de investigação da carácter qualitativo centrada num estudo de caso, o referido método de ensino. Os participantes foram uma professora de Matemática, do Ensino Básico, e a sua turma de 7.º ano.

A proposta foi implementada em duas aulas: uma, em que o material manipulável foi apresentado aos alunos e em que estes já realizavam operações ao nível da adição; e uma outra aula em que se abordou a multiplicação de números relativos, numa fase em que os alunos já se tinham familiarizado com o material.

As aulas não foram a única fonte de recolha de informação, tendo também sido realizadas duas entrevistas semi-estruturadas à professora (uma antes e outra após a realização da segunda aula). Foram ainda recolhidas respostas escritas dos alunos a uma questão que se lhes colocou no final da segunda aula. Desta recolha de dados resultou informação de que foi feita uma descrição e análise pormenorizadas dos resultados.

A interpretação que fizemos dos resultados, que apresentaremos de seguida, tentou responder o mais claramente possível às questões que tínhamos definido, realçando os aspectos peculiares com que nos confrontámos. Aliás, “a metodologia de estudo de caso utiliza procedimentos e técnicas para descrever e analisar uma variedade de elementos presentes no fenómeno em estudo, devendo esta descrição realçar o que há de peculiar no caso” (Matos, J. & Carreira, S., 1994, p.24).

V.2 – Síntese dos Resultados

- A primeira nota que queremos registar é que, de facto, uma abordagem histórica inicial do material usado na experiência – o Ábaco – estimula a curiosidade dos alunos e o valor que dão à própria actividade. Este foi, aliás, um ponto que já tínhamos referido na Revisão de Literatura efectuada, em que confirmamos o que nos é sugerido pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (1991): "Através da história da matemática, problemas práticos e investigações teóricas estimularam-se mutuamente, de tal modo que é impossível desligá-las." (p.6)

Estas referências históricas também ajudam na melhoria da imagem social da Matemática e, consequentemente, na consecução de um dos objectivos actuais definidos para os alunos, que é o de darem mais valor à disciplina.

Este efeito positivo da abordagem histórica do material que os alunos iam utilizar foi por nós, então, confirmado – a generalidade dos alunos interessou-se por conhecer as raízes históricas do Ábaco.

- Na primeira aula, os alunos interiorizaram muito rapidamente o "funcionamento" do "Ábaco dos Inteiros". Inicialmente, mexiam "a medo" nas peças deste material, mas, depois, de uma forma cada vez mais ágil e natural, manipulavam, visualizavam e representavam, no ábaco, todas os números e operações que lhes eram solicitados.

De facto, as recomendações das Teorias de Desenvolvimento e de psicólogos como Piaget, Bruner, Dienes e Vygotsky, no sentido da adequação das práticas de ensino ao pensamento dos alunos, fizeram, neste estudo, todo o sentido. Não adianta insistir num ensino que não tenha em conta a forma de pensamento dos destinatários, neste caso, dos alunos. Assim, nesta altura – 7.º ano de escolaridade –, de acordo com Piaget (1983) verifica-se que a maioria dos alunos encontra-se na transição do estádio das operações concretas para as formais e as aprendizagens só serão significativas se partirem de situações concretas e reais, com um forte carácter intuitivo. Ora, foi precisamente o que esta abordagem permitiu aos alunos – o ponto de partida concreto. Mais ainda, permitiu-lhes manipular e visualizar todas as situações operatórias, dando-lhes a oportunidade de uma primeira representação *enactiva* dos conceitos envolvidos. Este modo de representação inicial, que Bruner (1971) defendia ser o primeiro na formação dos conceitos, foi, depois o "trampolim" para os outros modos de representação, o *icónico* e o *simbólico*, aos quais as crianças "chegaram" sem problemas e com uma rapidez que surpreendeu a própria professora.

A questão da rapidez com que os alunos trabalharam no Ábaco, a questão do tempo, foi, recorrentemente, invocada pela professora, pois esta tinha a ideia que o uso de materiais manipuláveis atrasava a realização das actividades, prejudicando o cumprimento dos programas curriculares. Contudo, o que se verificou foi exactamente o contrário. Segundo as palavras da própria professora, no final da primeira aula, "dar a Adição, a Adição sucessiva e ainda as Propriedades da Adição, coisa que eu até achava que iria ser mais demorada com a utilização do Ábaco, revelou-se mais rápida(...)".

- Em ambas as aulas, a dinâmica foi excelente: os alunos envolveram-se activamente nas tarefas e o nível de participação foi total. Estes demonstraram uma grande motivação e confiança nas suas acções e, consequentemente, era visível a sua vontade de participar e responder. Mesmo os alunos que, habitualmente, revelavam mais dificuldades, estavam envolvidos acompanhando todas as operações que se efectuavam no Ábaco.

Este aspecto também foi realçado pela professora, que nos falou da "auto-estima e confiança" com que os alunos saíram destas aulas, em contraste com o que acontecia em anos anteriores.

- Tanto numa aula como noutra, verificamos uma tendência para que os alunos, gradualmente, prescindissem de efectuar todas as operações no Ábaco. As primeiras operações eram totalmente acompanhadas no material, mas, a partir daí, os alunos começavam a representar mentalmente a imagem dessas acções, o que lhes permitia prever os resultados das operações e traduzi-los simbolicamente. Esta progressão na compreensão das operações coincidiu com o que Bruner (1971) propunha para a evolução da formação de conceitos: o processo começa com o modo de representação *enactivo* (usualmente, em acções que envolvem a manipulação de materiais concretos) e, depois, a partir deste momento, o aluno move-se entre outros modos de representação - o *icónico* (através da representação das imagens das acções que começa a prescindir de concretizar) e o *simbólico* (pela tradução simbólica dos conceitos).

Estes três modos de representação foram evidenciados pela generalidade dos alunos, ainda que com algumas variações. Os alunos que a professora considerava serem os que tinham "mais dificuldades", demonstravam uma maior predominância do modo de representação enactivo. Estes alunos eram dependentes da acção, no "Ábaco dos Inteiros", durante mais tempo do que os outros, que cedo começavam a prescindir da manipulação no material. Estes últimos, ainda que começassem por um modo de representação enactivo, tal como os primeiros, rapidamente evoluíam para os modos de representação icónico e simbólico. Isto deve-se, segundo Alexandra, ao facto de estes alunos "terem outra capacidade de memorização, raciocínio e abstracção".

Com base nesta evolução e progressão dos modos de representação internos dos conceitos numéricos e operatórios, concluímos que o contacto com o material, de uma forma mais alargada no tempo, poderia ser vantajoso, principalmente, para os alunos com "mais dificuldades" ou que revelem ainda um pensamento muito concreto e que dificilmente realizam abstracções. Para os outros alunos, este prolongamento do acompanhamento do material não fará tanta falta.

Aspectos particulares da 2.ª aula

- A professora desempenhou um papel mediador fundamental entre a actividade que se pretendeu implementar, o rigor dos conceitos matemáticos envolvidos que se pretendeu veicular e a aprendizagem dos mesmos. A comunicação constante que Alexandra estabeleceu com os seus alunos revelou-se importante em toda a experiência, pois estimulou um ambiente interactivo em que os alunos, mais facilmente, acompanharam as tarefas e reorganizaram os conceitos. Tal como Vygotsky (1979) nos propunha, a linguagem revelou-se um dos instrumentos psicológicos mais importantes na construção de conhecimentos, neste caso, na reorganização do conceito de multiplicação, pela sua extensão aos números negativos.

Quando discutimos a perspectiva vygotskiana, na Revisão de literatura efectuada, tínhamos concluído que uma importante implicação desta era o facto de a reorganização das experiências dever considerar o nível de colaboração e ajuda que o aluno necessita para, mais tarde, produzir determinadas actividades de forma independente e autónoma. Ora, isto só seria efectivo se o professor assumisse este papel mediador como foi o caso da Alexandra Martinho. Tal verificou-se na explicação do "funcionamento" do "Ábaco dos Inteiros", na discussão que promoveu em torno do conceito de multiplicação, no esclarecimento de conceitos como o de multiplicador, e ainda no acompanhamento atento que demonstrou ter perante os seus alunos.

- Quanto à questão da compreensão do conceito de multiplicação, alargado agora ao domínio dos números inteiros relativos, o que podemos dizer é que esta abordagem permitiu aos alunos, no imediato, atribuir um sentido intuitivo à operação, coerente com o que já conheciam da mesma.

O facto de os alunos efectuarem, no Ábaco, todo o tipo de multiplicações com números inteiros, permitiu-lhes visualizar cada resultado e generalizar, intuitivamente, a Regra dos Sinais para a Multiplicação, a qual, de outra forma, seria decorada pela maioria dos alunos desprovida de qualquer sentido [pelo menos, nos casos dos multiplicadores negativos, (-)x(+) e (-)x(-)]. Aliás, isto mesmo nos confirmou Alexandra quando afirmou que, em anos anteriores, gostaria de ter "arranjado" exemplos para explicar o porquê de "menos vezes menos dar mais", mas nunca conseguiu, acrescentando que apenas explicava a dedução da *Regra dos Sinais* uma vez "porque quase ninguém acompanhava", havendo sempre "no máximo, três alunos por turma" que o faziam. De acordo com Alexandra, a *Regra dos Sinais* era recebida como uma "tábua de salvação", que substituía uma dedução que os alunos não acompanhavam nem compreendiam.

Por tudo o que já referimos, não temos dúvidas em afirmar que esta abordagem tem a grande vantagem de contribuir para uma compreensão intuitiva do conceito de multiplicação também nos casos em que o multiplicador é negativo. Isto permite ao aluno integrar este conhecimento na estrutura interna que já possui associada ao conceito de multiplicação, evitando rupturas ou bloqueios que o possam prejudicar futuramente.

Hiebert e Carpenter (1992) defendiam um olhar mais atento para a compreensão da informação que o aluno estrutura e representa, sublinhando a importância do número e força das conexões internas estabelecidas por ele, neste processo. Também Piaget (1983) nos chamou a atenção para um conhecimento prévio das estruturas existentes no alunos, de forma a que pudesse ocorrer uma progressão real das mesmas através de processos de assimilação e acomodação.

No que respeita à compreensão, Alexandra comentou o seguinte: "Aí, eu acho que é 100% vantajoso em relação aos outros métodos. Quer dizer, o efeito é praticamente imediato."

Realmente, da observação da segunda aula, este efeito imediato foi bem evidente. Por isso, no final da mesma, para confirmar ou não esta constatação, foi solicitada aos alunos uma resposta por escrito à questão "Por que é que menos vezes menos dá mais?".

Em 26 respostas analisadas, 21 alunos responderam baseando-se em exemplos com o "Ábaco dos Inteiros". Para estes alunos, parecia claro que "menos vezes menos dá mais" porque, retirando sucessivamente um quantidade negativa, resulta um excesso de uma quantidade positiva".

Além destes indicadores, também temos a referência da professora aos resultados que decorreram das avaliações posteriores à experiência que, segundo Alexandra, "foram especialmente melhores do que no ano anterior", em que também teve 7.º ano.

- Como já referimos, as nossas conclusões debruçam-se, sobretudo, sobre os efeitos imediatos da implementação da proposta. Em relação aos erros e dificuldades associados à multiplicação de números inteiros relativos, entre os quais, está, por exemplo, a confusão de sinais entre a Adição e a Multiplicação, não pudemos formular conclusões rigorosas, já que não estudámos, especificamente, esses aspectos no tempo que se seguiu à implementação da proposta. No entanto, um ano depois da realização da experiência, pedimos que Alexandra nos desse a sua opinião sobre este aspecto dos erros, ao que esta nos respondeu que "a maior parte dos alunos faz menos", embora reconheça que há ainda uma percentagem que os faz. Todavia, a professora é da opinião que "mais rapidamente eles corrigem esses erros", salvaguardando, no entanto, o seguinte: "Mas é assim, não posso fundamentar muito bem isso, é só mesmo intuição, talvez, talvez...".

Por tudo o que foi referido, cabe-nos, então, responder claramente à questão de investigação dizendo que a proposta de ensino implementada para a Multiplicação de números inteiros relativos, no 7.º ano de escolaridade, é, sem margem para dúvidas, efectiva. Isto porque:

- não só facilita a aprendizagem dos alunos sobre esta matéria, por ser baseada na utilização de materiais manipuláveis, que permitem ao aluno uma abordagem intuitiva com suporte de uma experiência física e concreta;

- mas também porque facilita o ensino da mesma, proporcionando uma dinâmica de aula em que o professor se consegue fazer entender e acompanhar pela totalidade dos alunos, em contraste com o que acontece nas abordagens tradicionais.

V.3 – Recomendações / Limitações

Depois desta investigação e das perspectivas que abre para uma abordagem alternativa da multiplicação de números inteiros relativos, somos levados a uma reflexão mais profunda sobre aspectos que, muitas vezes, por comodismo, são deixados na “gaveta”. Reflictamos, por isso, em questões como, por exemplo: a reformulação dos métodos de ensino; as dificuldades sentidas pelos alunos em determinadas matérias específicas; a integração dos contributos das Teorias psicológicas na estruturação dos currículos de Matemática; a formação inicial de professores de Matemática, etc... Estes são apenas alguns temas gerais com que nos devemos preocupar actualmente, como professores de Matemática e também como investigadores desta área.

Para além desta recomendação geral, salientamos outras, de carácter particular, que decorrem da investigação realizada:

- **no ensino**, recomenda-se a utilização de materiais de manipulação, que proporcionem representações adequadas de conceitos e operações;

- **a formação de professores** deveria proporcionar aos professores e futuros professores experiências concretas de ensino que utilizem materiais de manipulação;

- **para a investigação,** recomenda-se

  🗋 uma intensificação da investigação educacional no que respeita à área dos Números e Operações, pois ainda se verificam várias lacunas a este nível, principalmente, em trabalhos que envolvam a restruturação dos conceitos operatórios no momento em que estes de estendem aos números fraccionários e, depois, aos números negativos;

- uma investigação sobre os efeitos, a longo prazo, da abordagem que implementámos, no que respeita aos erros tradicionalmente identificados na multiplicação de inteiros relativos, como, por exemplo, a confusão de sinais entre a adição e multiplicação de números negativos;

- uma investigação envolvendo uma abordagem algébrica das operações (com monómios e polinómios), recorrendo ao "Ábaco dos Inteiros", no 8.º ano de escolaridade, onde também se costumam identificar dificuldades.

Limitação do estudo

Se, por um lado, num estudo de caso, como este, se torna apropriado um cruzamento de papéis da investigadora – pesquisadora, observadora, inquiridora e ouvinte –, este cruzamento pode ter provocado demasiada interferência da investigadora, nomeadamente, ao nível da interpretação da informação, o que pode ter causado algum enviezamento da análise.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., Oliveira, I.(1999).*A Matemática na Educação Básica*. Ministério da Educação: Departamento de Educação Básica.

Alaniz, J. (1998). *Ask Dr. Math.*[online]. Available: http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Alejandre, S., sem data. *Ask Dr. Math.*[online]. Available: http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Bart, W. M. (1971). More on Dienes. In Douglas B. Aichele & Robert E. Reys (Eds.). *Readings in Secondary School Mathematics* (pp. 238-251). London; Prindle, Webwr & Schmidt.

Blech, El-ad (1998). *Ask Dr. Math.*[online]. Available: http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Bodgan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. S. (1971). Bruner on the Learning of Mathematics – A "Process" Orientation. In Douglas B. Aichele & Robert E. Reys (Eds.). *Readings in Secondary School Mathematics* (pp. 166-177). London; Prindle, Webwr & Schmidt.

Bruner, J. S. (1997). Celebrating Divergence: Piaget and Vygotsky. *Human Development*, 40, 63-73.

Cooke, M. B. (1993). A Videotaping Project to Explore the Multiplication of Integers. *Arithmetic Teacher*, 41(3), 170-171.

Courant, R., Robbins, H. (1941). *What is Mathematics ? – An elementary approach to ideas and methods*. Oxford: Oxford University Press.

Crowley, M.L., Dunn, K. A. (1985). On Multiplying Negative Numbers. *Mathematics Teacher*, 78 (4), 252-256.

Dienes, Z. P. (1971). Dienes on the Learning of Mathematics. In Douglas B. Aichele & Robert E. Reys (Eds.). *Readings in Secondary School Mathematics* (pp. 222-237). London; Prindle, Webwr & Schmidt.

Dirks, M. K. (1984). The Integer Abacus*. Arithmetic Teacher*, 31(3), 50-54.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall J. P. (1996 a.). *Collecting research data with questionnaires and interviews*. In *Educational research: An introduction* (pp. 287-326). New York: Longman Publishers USA.

Gall, M. D., Borg, W. R. & Gall J. P. (1996 b.). *Case study research*. In *Educational research: An introduction* (pp. 543-589). New York: Longman Publishers USA.

Herman, D. (2001). *Ask Dr. Math.*[online].
Available:
http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with understanding. In D. A. Grows. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan.

Holmes, E. E. (1985). *Children Learning Mathematics – A cognitive approach to teaching*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Johnson, D. A. (1971). Why Use Instructional Materials in the Mathematics Classroom? In Douglas B. Aichele & Robert E. Reys (Eds.). *Readings in Secondary School Mathematics* (pp. 349-351). London; Prindle, Webwr & Schmidt.

Lessard-Hébert, T, M., Goyette, G., Boutin, G. (1994), *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Lima, M., Ribeiro, C., Duarte, S., Felgueiras, Salvador, V. (2002). *EnigMat – 3.º ciclo do Ensino Básico – 7.º ano*. Edições ASA: Porto.

Linchevsky, L., Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 131-147.

Ludke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, Lda.

Matos, J. (sem data). Dez anos de investigação em educação matemática numa perspectiva sócio-cultural: questões e perspectivas. [online].
Available: http://correio.cc.fc.ul.pt/~jflm/dezanos.html (Dezembro 6, 2001)

Matos, J. & Carreira, S. (1994). Estudo de caso em Educação Matemática – problemas actuais. *Quadrante*, 3(1), 19-53.

Menezes, L. (1997). O discurso da aula de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, 44, 5-11.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco: Sage.

Miliaret, G. (1975). *A aprendizagem da Matemática – Ensaio de Psicopedagogia*. Coimbra: Livraria Almedina.

Morgado, L. M. A. (1993). *O ensino da aritmética – perspectiva construtivista*. Coimbra: Livraria Almedina.

National Council of Teacher of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teacher of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles aind Standards for School Mathematics*. Reston, Va: National Council of Teacher of Mathematics.

Neves, M.A.F., Faria, M.L.M. (2001). *Matemática – Parte 1 – 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Passos, I.C., Correia, O.F. (2003). *Matemática em Acção – Parte 2- 7.º ano / 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Lisboa Editora.

Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park: Sage.

Piaget (1983). Problemas de Psicologia Genética. Lisboa: Publicações Dom Quixote (Tradução portuguesa da edição original de 1972)

Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática*. *Quadrante*, 3(1), 3-18.

Ponte, J. P., Matos, J. M., Abrantes, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática: implicações curriculares*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P. (2001). *A investigação sobre o professor de matemática: problemas e perspectivas* [online].
Available: http:// www.correio.cc.ul.pt.html (Dezembro 6, 2001)

Ponte, J. P. (2003). *O Ensino da Matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* In *O ensino da Matemática: Situação e Perspectivas*. Conselho Nacional de Educação (Org.) (pp. 21-56). Ministério da Educação.

Rabelo, E. H. (2002). *Textos Matemáticos – produção, interpretação e resolução de problemas*. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes.

Sally (1994). *Ask Dr. Math.*[online].
Available:
http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Santos, I., Barros, J. (1998). *Matemática. 7.º Ano*. Lisboa: Didáctica Editora.

Sarver, V.T. (1986). Sharing teaching ideas: Why does a negative times a negative produce a positive? *Mathematics Teac*her, 79(3), 178-180.

Shulmann, L. S. (1971). Psychological Controversies in the Teaching of Mathematics. In Douglas B. Aichele & Robert E. Reys (Eds.). *Readings in Secondary School Mathematics* (pp. 178-192). London; Prindle, Webwr & Schmidt.

Silva, J. S. (1964). *Guia para a utilização do compêndio de matemática* (policopiado). Lisboa: Ministério da Educação.

Sprinthall, N. A. , & Sprinthall, R. C. (1993). Psicologia Educacional – Uma abordagem desenvolvimentista. Portugal: McGraw-Hill.

Sunny (1997). *Ask Dr. Math.*[online].
Available:
http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

Szendrei, J. (1996). Concrete Materials in the Classroom. In Alan J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (Part 1) (pp. 411-434). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vygotsky, S. (1979). *Pensamento e linguagem*. Lisboa: Edições Antódoto.

Whittaker, S. (1997). *Ask Dr. Math.*[online].
Available:
http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.integer.alej.html (Julho 16, 2003)

ANEXOS

ANEXO 1

Escola E. B. 2, 3 Egas Moniz – Guimarães

Ano Lectivo 2003 / 2004

Matemática – Ficha N.º 1

Informação:

Ábaco, m. (lat. abacus). Máquina de calcular usada por ______________, romanos e vários povos da antiguidade. Base fundamental da vida comercial e financeira durante milénios.

A ciência do seu uso pode ser apreendida em pouco tempo. Mas a arte da sua aplicação profissional exige uma longa experiência e um operador bastante experimentado nesta actividade.

O ábaco, ainda usado em muitas partes do globo, tem hoje, no mundo ocidental, um alto valor estético e grande interesse para coleccionadores. Mas, como instrumento de trabalho em aplicações financeiras, foi ultrapassado por outras soluções mais evoluídas.

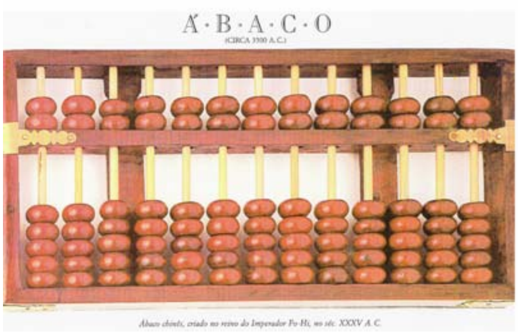


Fig.1 **Ábaco Chinês**
(Criado no reino do Imperador Fo-Hi, no séc. XXXV A. C.)

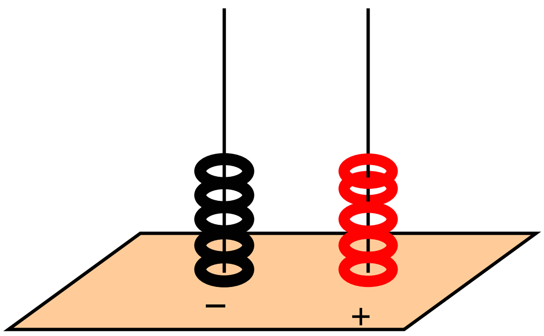


Fig.2 **Ábaco dos Inteiros**
(Referenciado pela primeira vez por Bartolini, em 1975, e repescado, novamente, em 1984, por M. Dirks, num artigo sobre Educação Matemática. Em Portugal, está a ser experimentado pela primeira vez, com a tua turma!!!).

Observação: No ábaco dos inteiros com que vais trabalhar considera as peças vermelhas números inteiros positivos e as peças pretas números inteiros negativos.

I. Representação do zero

a) Representa, no ábaco, o número zero de diferentes formas.

b) Como se designam os números representados em cada um dos pilares, quando o zero está representado?

II. Representação de números inteiros positivos

Representa, no ábaco, os números 2, 5 e 7, de diferentes formas.

III. Representação de números inteiros negativos

Representa, no ábaco, os números -3 , -6 e -8, de diferentes formas.

IV. Adição de números inteiros relativos

1. Efectua, no ábaco, as seguintes adições:

a) (+3) + (+2) =

b) (+4) + (+1) =

c) (+5) + (+2) =

d) (+6) + (+3) =

2. Efectua, no ábaco, as seguintes adições:

a) (-3) + (-2) =

b) (-4) + (-3) =

c) (-5) + (-3) =

d) (-6) + (-4) =

3. Efectua, no ábaco, as seguintes adições:

a) (+3) + (-2) =

b) (+4) + (-2) =

c) (-2) + (+5) =

d) (-5) + (+9) =

e) (-4) + (+2) =

f) (-7) + (+3) =

g) (+5) + (-10) =

h) (-6) + (+6) =
i) (+4) + (-4) =

4. Completa as afirmações

a) A soma de dois números relativos com o mesmo sinal, é um número __________ __________

_____________ ______________ e cujo valor absoluto é a ______________ dos valores absolutos das _________________ .

b) A soma de dois números relativos com sinais _________________, é um número cujo sinal é o do que tiver ____________ valor absoluto e cujo valor absoluto é igual à _____________ dos valores absolutos das ________________ .

c) A soma de dois números ____________________ é zero.

EXERCÍCIO: Completa os espaços em branco com números inteiros relativos.

Se tiveres dificuldades, usa o ábaco!

a) (+3) + (+1) = ____

b) (-6) + (-3) = ____

c) (-6) + (+4) = ____

d) (+6) + (+1) = ____

e) (-5) + (+5) = ____

f) (+10) + (-8) = ____

g) ____ + (+1) = +8

h) (-12) + ____ = -14

i) (-7) + ____ = -3

j) (-12) + (+3) = ____

k) (-15) + (-12) = ____

l) (+20) + (-17) = ____

m) (+11) + ____ = 0

IV. Adição sucessiva

1. Efectua, no ábaco, as adições:
   a) (+2) + (+3) + (+1) =
   b) (-2) + (-2) + (-5) =

c) (+2) + (-3) + (+4) + (-1) =

d) (-6) + (+2) + (-1) =

e) (+7) + (-3) + (-2) =

f) (+3) + (-2) + (-7) =

g) (+5) + (-9) + (-5) + (+7) =

h) (+1) + (-4) + (-6) =

2. Completa:

Uma adição sucessiva é uma adição com __________________ __________________ .

Para facilitar os cálculos podemos utilizar as propriedades da adição.

Propriedade Comutativa

A _____________ das parcelas não altera a _______________ .

Exemplo: ____ .

Propriedade ____________

A soma de três parcelas não depende da maneira como se agrupam.

Exemplo: ____ .

Propriedade da Existência de Elemento Neutro

________ é o elemento neutro da adição.

Exemplo: ____ .

Propriedade da Existência de Elemento Simétrico

Exemplo: ____ .

V. <u>Subtracção de números inteiros relativos</u>

1. Efectua, no ábaco, as seguintes subtracções:

a) (+8) – (+3) =

b) (+6) – (+2) =

c) (+8) – (-2) =

d) (+5) – (-3) =

e) (-3) – (+2) =

f) (-4) – (+5) =

g) (-1) – (-4) =

h) (+5) – (+7) =

ANEXO 2

Escola E. B. 2, 3 Egas Moniz – Guimarães

Ano Lectivo 2003 / 2004

Matemática – Ficha N.º 2

I. <u>Multiplicação de números inteiros relativos</u>

1. Transforma as multiplicações em adições.

a) 2 x 3 =

b) 3 x 4 =

c) 5 x 2 =

d) 4 x 1 =

2. Efectua, no ábaco, as multiplicações:

a) (+2) x (+3) =

b) (+3) x (+4) =

c) 0 x (+10) =

d) (+1) x (+5) =

e) (+3) x 0 =

3. Efectua, no ábaco, as multiplicações:

a) (+2) x (-3) =

b) (+2) x (-4) =

c) (+3) x (-2) =

d) 0 x (-10) =

e) (+1) x (-4) =

4. Efectua, no ábaco, as multiplicações:

a) (-3) x (+2) =

b) (-2) x (+3) =

c) (-3) x (+4) =

d) (-4) x 0 =

e) (-2) x (+4) =

5. Efectua, no ábaco, as multiplicações:

a) (-2) x (-3) =

b) (-2) x (-4) =

c) (-1) x (-2) =

d) (-3) x (-2) =

e) (-1) x (-1) =

6. Completa as afirmações

a) O produto de dois números positivos é um número ____________________ .

b) O produto de dois números de sinais contrários é um número _______________ .

c) O produto de dois números negativos é um número __________________ .

d) 1 é ______________ ________________ da multiplicação.

e) 0 é ______________ ________________ da multiplicação.

EXERCÍCIO: Completa os espaços em branco com números inteiros relativos.

Se tiveres dificuldades, usa o ábaco!

a) (-3) x (-4) = ____

b) (-2) x (+5) = ____

c) (-5) x (+3) = ____

d) (-2) x (-5) = ____

e) (-1) x (+10) = ____

f) 3 x (-10) = ____

g) ____ x 3 = 0

h) 7 x ____ = -7

i) (+100) x ____ = 0

j) ____ x (-20) = -20

k) ____ x (-5) = 20

l) ____ x 3 = 15

m) 0 x ____ = 0

II. Multiplicação Sucessiva

1. Calcula:

a) (-2) x (-6) x (-1) =

=

=

b) (-3) x (+4) x (-1) x (+2) =

=

=

c) (-5) x (-1) x (-10) x (+8) =

=

=

d) (-3) x (+5) x (-1) x (-2) =

=

=

2. Completa as afirmações:

a) Uma multiplicação sucessiva é uma multiplicação com ______________ ______________ .

b) Para ____________ mais de dois números inteiros relativos podemos multiplicar os ________________ ________________ , o resultado obtido pelo ________________ e assim __________________ , até esgotar todas as __________________ .

3. Identifica a propriedade que permite escrever:

a) (-3,4) x 0 = 0 ____

b) 1 x (-3) = -3 ____

c) (-2) x 3 = 3 x (-2) ____

d) –2 x [3 x (-4)] = (-2 x 3) x (-4) ______________________________

e) (-3) x [(-2) + 4] = (-3) x (-2) + (-3) x 4 ______________________________

III. Multiplicação de números racionais

1. Calcula:

a) (-5) x 0,2 =

b) 3 x (-0,4) =

c) (-0,1) x (-0,1) =

d) (-2,1) x 0,3 =

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=$

g) $\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(+\frac{2}{3}\right)=$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-0{,}3\right)=$

i) $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=$

j) $(-4)\times\left(+\frac{5}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=$

k) $(-7)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-6\right)=$

l) $\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{7}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)=$

m) $\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=$

n) $\left(\frac{1}{3}\right)\times 3=$

o) $\left(+\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=$

IV. Adição e Multiplicação de números racionais

1. Copia para o teu caderno diário e calcula:

a) -3 x 5 x 10 =

b) (-6 –2) x (-5) =

c) $\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}+1=$

d) $-0{,}4+\frac{1}{4}\times\left(0{,}2+\frac{2}{5}\right)=$

e) $1+\frac{1}{3}\times(1-10)=$

f) $0{,}3-2\times 0{,}4+(-0{,}5)=$

g) $-5\times(-1{,}2+0{,}2)=$

h) $\frac{3}{2}-2\times\left(\frac{7}{2}-3\times\frac{5}{4}\right)=$

2. Calcula no teu caderno diário.

a) O produto do simétrico de –3 pelo inverso de –5 .

b) A diferença entre 5 e o simétrico de –9 .

c) A soma do valor absoluto de –2,4 com o inverso de $-\frac{1}{10}$.

d) O produto do simétrico de $\frac{9}{4}$ pelo inverso de $-\frac{3}{2}$.

ANEXO 3

Grelha de Observação

Aula sobre: Multiplicação de Números inteiros relativos

Data:

Conceito de multiplicação	Professora:
	Alunos:
Exploração de conceitos associados à multiplicação	Exs: Soma sucessiva
	Multiplicador (positivo / negativo?)
	Multiplicando (positivo / negativo?)
Aceitação / adaptação do e ao material (ábaco dos inteiros) para a operação de multiplicação	Dificuldades / Dúvidas sentidas pelos alunos:

Exploração, no ábaco, de exemplos de multiplicações de:	Aceitação do sinal do Produto:	Porquê? Faz sentido para os alunos?	Dificuldades:	Comentários dos alunos
(+) . (+)				
(+) . (-)				
(-) . (+)				
(-) . (-)				

Multiplicar com o ábaco

Facilita o ensino da multiplicação de (-) com (-) ?

Facilita a aprendizagem da multiplicação de (-) com (-)?

ANEXO 4

Guião da Entrevista a realizar por Márcia Coelho à professora Alexandra Martinho, da Escola E.B. 2, 3 Egas Moniz (Guimarães), no dia 11 de Fevereiro de 2004

Dados da Professora

Nome:
Idade:
Formação:
Tempo de serviço:
Experiência Profissional:

Questões

1. O que pensa da Matemática como Ciência? Qual a natureza que lhe confere? Mais abstracta, mais concreta...?

O que pensa do ensino da Matemática?

Sempre gostou de Matemática?

2. Que dificuldades sentiu como aluna?

Que dificuldades sente como professora?

3. Sente dificuldades em leccionar a adição e subtracção de números relativos?

E os alunos, sentem dificuldades?

Recorre a exemplos concretos para suportar a explicação dos resultados das adições e subtracções com números relativos?

4. Que concepção tem acerca da operação de Multiplicação? Com essa concepção como explica que:

$2 \times 3 = 6$

$2 \times -3 = -6$

$-2 \times 3 = -6$

$-2 \times -3 = 6$

5. Alguma vez se questionou acerca do porquê de "menos vezes menos dar mais"?

Acha que faz sentido levantar este porquê mesmo depois de ver demonstrado este resultado num domínio abstracto?

6. Como tem ensinado a multiplicação de números negativos? Sempre ensinou do mesmo modo?

7. Quando ensina a multiplicação de números negativos é frequente os alunos perguntarem "Porquê" ou pedirem exemplos de suporte? Como lhes responde?

8. Que dificuldades sente por parte dos alunos na aprendizagem da multiplicação de números relativos e, em particular, na de números negativos?

Essas dificuldades dissipam-se com o tempo ou agudizam-se?

9. Sente que os alunos realmente percebem a famosa "Regra dos sinais" ou que a decoram vazia de sentido?

10. Se a confrontassem com a ideia da multiplicação ser uma adição repetida e se lhe pedissem uma explicação de, p.ex., $-2 \times -3 = 6$, com base neste conceito, o que responderia?

11. Se um aluno se esquecer da "Regra dos sinais" da multiplicação de números relativos, qual a representação mental ou raciocínio a que pode recorrer para saber que $- \times - = +$?

12. É frequente ou não os alunos aplicarem erradamente a "Regra de sinais da multiplicação" à adição algébrica de números relativos, ou seja:

-3 -4 = + 7 !!! (“porque menos com menos dá mais”)

13. Acha que a maioria dos alunos de 7.º ano está preparada para perceber a multiplicação de números negativos? Porquê?

14. Se a multiplicação de números relativos fosse suportada com um material didáctico adequado, em que os alunos pudessem manipular, mexer, e observar todos os casos de multiplicação de números inteiros relativos e os resultados, acha que as dificuldades acima referidas diminuíam ou até desapareceriam?

Que importância acha que tem este tipo de material e experiência para os alunos de 7.º ano?

15. Utiliza habitualmente materiais manipuláveis ou outros para apoio visual aos conceitos e às operações? O que lhe parece a sua utilização?

Notas:

(Fim do guião)

ANEXO 5

____

Guião da Entrevista a realizar por Márcia Coelho à professora Alexandra Martinho, da Escola E.B. 2, 3 Egas Moniz (Guimarães), no dia 19 de Fevereiro de 2005

---

1. No final da primeira aula com o ábaco tinha ficado surpreendida com a rapidez com que os alunos interiorizaram o funcionamento deste material e com o curto espaço de tempo em que tinha "dado" a adição e subtracção de números inteiros relativos. Essa constatação tinha-lhe provocado grandes expectativas quanto à aula que ainda iria realizar da multiplicação de números relativos.
Em relação a essa aula tinha dito até: "...sinceramente, acho que vai ser eficaz!"
Depois dessa aula ter acontecido, confirmou as expectativas?

2. E a longo prazo, quais foram, em seu entender, os efeitos da experiência que fizemos, sobretudo para os alunos?

3. Acha que as dificuldades que os alunos, normalmente, sentem nesta matéria foram diminuídas ou suprimidas com esta abordagem?

4. Na primeira entrevista (há cerca de um ano), revelou-nos que um dos principais erros que os alunos cometiam, relacionados com esta matéria, era a confusão de sinais entre a adição e multiplicação, sobretudo depois de se introduzir a "regra dos sinais" da multiplicação".
Qual acha que foi o efeito desta proposta no combate a esses erros e confusões a curto, médio e longo prazo?

5. Notou diferenças na compreensão da operação de multiplicação por parte dos seus alunos? E na compreensão da multiplicação entre números relativos, quando o multiplicador é um n.º negativo, em particular, na multiplicação entre dois negativos?
6. Se sim... Acha que essas diferenças apenas se notam enquanto o material está a ser utilizado, ou também na ausência dele? Isto é, promove apenas a

compreensão imediata, ou uma compreensão estrutural cognitiva mais estável, a longo prazo?

7. Os alunos recorreram, alguma vez, à representação mental ou esquemática do Ábaco dos Inteiros, para resolver situações problemáticas ou não? Com que frequência?

8. Acha que o material deveria ter sido disponibilizado durante mais tempo aos alunos?

9. Durante este tempo, sem o material, já teve vontade de recorrer a ele, em alguma situação? E os alunos, mencionaram-no, entretanto?

10. Acha que esta proposta se adequa à maioria dos alunos de 7.º ano?

11. De que forma faz a comparação entre esta proposta e outras que conhece?

12. Tente resumir-nos, na perspectiva de quem ensina e,depois, de quem aprende a multiplicação de números relativos:

- as principais vantagens desta abordagem
- as principais desvantagens da mesma

13. Gostaria de ver este material disponível nas escolas / salas de aula?

14. O que diria desta proposta a um professor que não a conhecesse?

15. Qual o balanço que faz de toda esta experiência?

Notas

(Fim do guião)